
*Agar insoniyat tomonidan yaratilgan
ilmiy yangiliklarning matematik
isboti bo'lmasa uni haqiqiy
fan qatoriga qo'shib bo'lmaydi.*

Leonardo da Vinchi

I bob. SKALYAR VA VEKTOR MAYDONLAR

1. Skalyar maydon

- *Skalyar maydon tushunchasi.*
- *Maydonlarning sath sirt va chiziqlari.*
- *Yo'nalish bo'yicha hosila.*
- *Skalyar maydon gradienti.*
- *Sirt normalining yo'naltiruvchi kosinuslari.*

1.1. Skalyar maydon tushunchasi

Ta'rif. Fazodagi biror D sohaning har bir M nuqtasiga aniq qonun bo'yicha biror $u(M)$ son mos qo'yilgan bo'lsa, bu sohada $u=u(M)$ skalyar maydon berilgan deyiladi. D soha sifatida fazoning biror bo'lagi, sirti yoki chizig'i bo'lishi mumkin.

Faraz qilaylik, D soha biror jism bilan to'ldirilgan bo'lsin. D sohaning biror M nuqtasida jism zichligi $\rho(M)$ bo'lsin. Bunday maydonni jismning zichliklar maydoni deyish mumkin. M dan boshqa nuqtada jism zichligi boshqa bo'lishi mumkin, yani jism D sohada notekis taqsimlangan bo'ladi. Agar skalyar maydon sohaning barcha nuqtalarida bir xil bo'lsa, bunday maydonni *bir jinsli maydon* deyiladi. Agar skalyar maydonning qiymati bir nuqtadan boshqa nuqtaga ko'chganda o'zgarsa bunday maydonga *bir jinsiz maydon* deymiz.

Xuddi shuningdek, atmosferaning har bir nuqtasiga bosimning aniq qiymatini mos qo'yish mumkin bo'lganligi sababli, atmosferadagi bosimlar maydoni berilgan, deyish mumkin. Qizdirilgan jismning har bir

ichki nuqtasiga tempetaturaning aniq qiymatini mos qo'yish mumkin bo'lganligi tufayli, qizdirilgan jism ichida temperaturalar maydoni berilgan, deb aytish mumkin.

Ba'zan skalyar maydonning qiymati vaqtga qarab ham o'zgarib borishi mumkin. Masalan, qizdirilgan jism temperaturasi tashqi muhit temperaturasiga qarab o'zgaradi. Bunday maydonlar *nostasionar skalyar maydonlarni* tashkil qiladi. Agar skalyar maydon vaqtga bog'liq bo'lmasa bunday maydonlarni *stasionar (barqaror)* maydonlar deyiladi.

Agar fazoda $Oxyz$ koordinatalar sistemasini kiritsak, u holda har bir M nuqta ma'lum x, y, z koordinatalarga ega bo'ladi va u skalyar funksiya shu koordinatalarning funksiyasi bo'ladi $u = u(M) = u(x, y, z)$. Bu holat skalyar maydonni ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi yordamida tekshirish imkonini beradi. Fiksirlangan O nuqta olinsa fazodagi ixtiyoriy M nuqtani uning radius vektorini yordamida aniqlash mumkin. Bu holda $u(M)$ skalyar maydonni $\vec{r} = \overline{OM}$ vektor argumentli skalyar funksiya deb qarash mumkin $u(\vec{r})$.

Agar skalyar maydon simmetriklik xususiyatiga ega bo'lsa, uni tahlil qilish juda osonlashadi.

Agar koordinata sistemasini shunday tanlash imkoniyati bo'lsaki unda maydon funksiyasi faqat ikki o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa bunday maydonlarga *yassi maydon* deyiladi.

Yassi maydonga bir xil isitilgan uzun aylanma trubali issiqlik trassasining atrofida joylashgan tuproq temperaturasini keltirish mumkin. Bunday holatda truba o'qiga perpendikulyar joylashgan barcha tekisliklarda tuproq harorati bir xil kechadi. Bunda tuproq temperaturasini aniqlovchi funksiya ikki o'lchovli bo'ladi (truba o'qi bo'ylab olingan koordinataga bog'liq bo'lmaydi).

Agar koordinatalar sistemasini shunday tanlansaki, unda skalyar maydon faqat bir koordinataning funksiyasi bo'lsa. Masalan, tinch holatda bo'lgan suv havzasining temperaturasini bir o'lchamli deyish mumkin. Bunda suv havzasining temperaturasi suv sathidan qancha pastda joylashganligiga bog'liq bo'ladi.

Skalyar maydonni silindrik koordinatalar sistemasida ham qarash mumkin. Agar skalyar maydon biror silindrik koordinatalar *Orqaz* sistemasida φ ga bog'liq bo'lmasa, bunday maydonni *o'qqa simmetrik* deyiladi. Yuqorida keltirilgan issiqlik trassasi atrofidagi tuproq temperaturasi o'qqa simmetrik bo'ladi (agar trassa yer sathidan yetarli pastda joylashgan bo'lib, tuproq sathi bilan temperatura almashish jarayonini inobatga oinmasa). Agar yassi skalyar maydon faqat radial

kordinatagagina (r) bog'liq bo'lsa, bunday maydonga *o'qli maydon* deyiladi.

Agar biror sferik $O r \varphi \theta$ koordinatalar sistemasida skalyar maydon faqat masofa r ga bog'liq bo'lsa (M nuqtadan fiksirlangan O nuqttagacha bo'lgan masofa), bunday maydon *markaziy maydon* deyiladi. Misol sifatida gravitatsion potensialni keltirish mumkin:

$$u(r) = G \frac{m_0}{r}$$

bu yerda G graviatasion o'zgarmas, m_0 massa.

Koordinata boshida joylashtirilgan q zaryadning hosil qilgan elektrostatik potentsiali

$$U(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ham markaziy maydon bo'ladi (koordinata boshidan tashqari).

Agar $|\vec{r}| = \text{const}$ bo'sa, $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$ kelib chiqadi. Shuning uchun sferada yotgan nuqtalar uchun elektrostatistik maydon potentsiali o'zgarmas bo'ladi: $u = \text{const}$.

1.2. Maydonlarning sath, sirt va chiziqlari.

Biz doimo $u = u(x, y, z)$ funksiyani bir qiymatli va uchala erkli o'zgaruvchi bo'yicha uzluksiz hosilalarga ega deb faraz qilamiz. Agar bu hosilalar bir paytda nolga aylanmasa

$$u(x, y, z) = C, \quad (C = \text{const})$$

tenglamani biror (maxsus nuqtalari bo'lmagan) sirtini aniqlaydi.

Ta'rif. Maydon skalyari bir xil qiymatlarga erishadigan maydon nuqtalari to'plamiga shu maydonning sath sirtlari (yoki ekvipotensial sirtlar) deyiladi.

$u = u(x, y, z)$ funksiya bir qiymatli bo'lganligi uchun har xil C larga mos kelgan sath chiziqlari o'zaro kesishmaydi.

Sath sirti deb ataluvchi bu sirt nuqtalarida u o'zgarmas qiymatni saqlaydi.

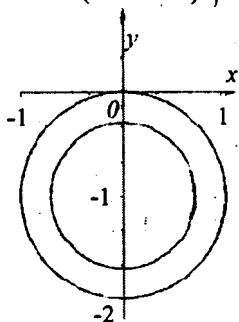
Fizik nuqtau nazardan maydonning sath sirtlari maydonning fizik hodisa bir xil sodir bo'ladigan nuqtalarining geometrik o'rnini bildiradi.

Xususan, yassi skalyar maydon qaralayotgan bo'lsa, «sath sirtlari» deyish o'rniga «sath chiziqlari» degan ibora ishlatiladi. Masalan, sinoptik kartalarda belgilanadigan izobaralar (teng bosim chiziqlari) va

izotermalar (teng temperatura chiziqlari) mos ravishda bosimlar maydonni va temperaturalar maydoninig sath chiziqlarini ifodalaydi.

1-misol. $u = x^2 + y^2 + 2y$ yassi skalyar maydonning sath chiziqlarini toping.

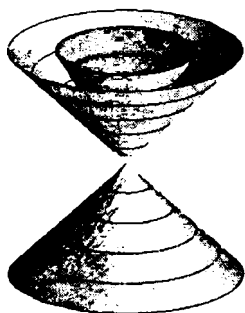
▷ Maydonning sath chiziqlarini $x^2 + y^2 + 2y = C$ tenglama orqali ifodalanadi. Chap tomondan to'liq kvadrat ajratib $x^2 + (y+1)^2 = C+1$ tenglamaga kelamiz. Demak, sath chiziqlar $C \geq -1$ shartlar uchun markazi $(0, -1)$ nuqtada joylashgan konsentristik aylana o'lasidan iborat bo'ladi (1.1-rasm). ◀



1.1- rasm

$G = \{(x, y, z) \neq 0 : x^2 + y^2 \geq z^2\}$ sohada aniqlangan. Sath sirt ta'rifiga ko'ra

$$\arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C \left(\left| C \right| \leq \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow (x^2 + y^2) \sin^2 C - z^2 = 0.$$



1.2- rasm

2-misol. $u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

skalyar maydonning sath sirtlarini toping.

▷ Berilgan skalyar maydonning aniqlanish sohasi

$$\left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1 \text{ tengsizlikdan}$$

aniqlanadi. Bundan,

$0 < z^2 \leq x^2 + y^2$. Demak, berilgan skalyar maydon

Shunday qilib, maydonning sath sirtlari uchlari koordinatalar boshida bo'lgan, $x^2 + y^2 = z^2$ sirt va undan tashqaridagi konus sirtlardan, $z=0$ tekislikdan iborat ($O(0,0,0)$ nuqta kirmaydi) (1.2- rasm). ◀

3-misol. Skalyar maydonning sath sirt tenglamasini toping.

$$u = e^{(\vec{a}, \vec{r})}$$

bunda \vec{a} - o'zgarmas vektor, \vec{r} - nuqtaning radius vektori

▷ Bunda

$$\vec{r} = \{x, y, z\} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

ga teng. Ularning skalyar ko'paytmasi esa

$$(\vec{a}, \vec{r}) = a_1x + a_2y + a_3z$$

Demak, sath sirt tenglamasi quyidagidek bo'ladi:

$$e^{(\vec{a}, \vec{r})} = C, \quad C > 0$$

Bundan $(\vec{a}, \vec{r}) = \ln C$ yoki $a_1x + a_2y + a_3z = \ln C$ ni olamiz. Bu parallel tekisliklar oilasini beradi. ◀

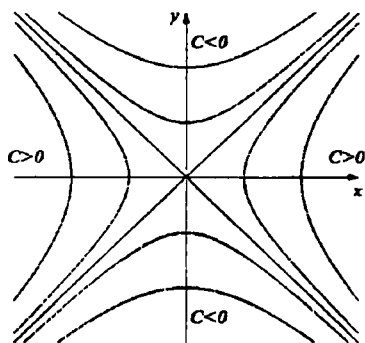
4-misol: $u = x^2 - y^2$ skalyar maydonning sath chizig'larini toping.

$$\triangleright x^2 - y^2 = C, \quad C = \text{const}$$

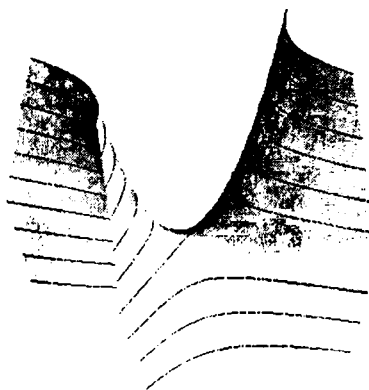
Agar $C=0$ bo'lsa,

$$y = x, \quad y = -x \text{ ni olamiz.}$$

Agar $C \neq 0$ bo'lsa, giperbolaga o'xshab ketadi (1.3 - rasm).



1.3 - rasm



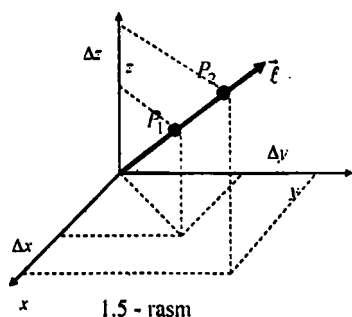
1.4 - rasm

1.4 - rasmda $u = x^2 - y^2$ funksiya sirtidagi sath chiziqlar keltirilgan. 1.3 - rasm 1.4 - rasmning sath chiziqlari xoy tekislikdagi proeksiyasidir.



1.3. Yo'nalish bo'yicha hosila

Uch o'lchovli fazoning biror G qismida $u = u(x, y, z) = u(P)$ skalyar



1.5 - rasm

maydon berilgan bo'lsin. Maydonda joylashgan biror $P_1(x, y, z)$ nuqtani olamiz va bu nuqtadan chiqadigan $\vec{l} = \{\ell_x, \ell_y, \ell_z\}$ vektorni qaraymiz. \vec{l} yo'nalishda skalyar maydonning o'zgarishini aniqlaymiz. Buning uchun \vec{l} yo'nalishda ikkinchi $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ nuqtani olamiz. $\overline{P_1P_2}$ vektor uzunligini $\Delta \ell$ bilan belgilaymiz (1.5- rasm):

$$\Delta \ell = |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \text{ Maydon funksiyasining ortirmasi}$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(P_2) - u(P_1) = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z) = \\ &= du + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \theta(\Delta \ell). \end{aligned}$$

Bu yerda $\theta(\Delta \ell)$ $\Delta \ell$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor, va $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ da $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$ bo'ladi. $\frac{\Delta u}{\Delta \ell} = V_o$ miqdor $u(P)$ skalyar funksiyaning \vec{l} vektor yo'nalishidagi o'rtacha o'zgarish tezligini beradi.

$$\frac{\Delta u}{\Delta \ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta \ell} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta \ell} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta \ell}.$$

Bu tenglikda limitga o'tamiz: $\Delta \ell \rightarrow 0$, ($P_2 \rightarrow P_1$):

$$\lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta \ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Bu yerda $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ lar $\overline{P_1P_2}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari. $\overline{P_1P_2}$ va \vec{l} vektor parallel bo'lganligi uchun ularning yo'naltiruvchi kosinuslari mos tushadi. $\vec{l} = \ell_x \vec{i} + \ell_y \vec{j} + \ell_z \vec{k}$ bo'lgani uchun

$$\cos \alpha = \frac{\ell_x}{|\vec{l}|}, \cos \beta = \frac{\ell_y}{|\vec{l}|}, \cos \gamma = \frac{\ell_z}{|\vec{l}|},$$

bo'ladi.

Ta'rif. Agar $\lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta \ell}$ mavjud bo'lsa, bu limitga $u(x, y, z)$ skalyar maydonning $P_1(x, y, z)$ nuqtadagi $\vec{\ell}$ vektor yo'nalishidagi hosilasi deyiladi va u

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta \ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

formuladan topiladi.

Yo'nalish bo'yicha hosilaning xossalari:

1) $u(P)$ funksiyaning P nuqtadagi $\vec{\ell}$ vektor yo'nalishi bo'yicha o'zgarish tezligi $\frac{\partial u(P)}{\partial \ell}$ ga teng.

2) $u(P)$ maydon P nuqtada $\vec{\ell}$ yo'nalish bo'yicha o'sishi uchun $\frac{\partial u(P)}{\partial \ell} \geq 0$.

3) $u(P)$ maydon P nuqtada $\vec{\ell}$ yo'nalish bo'yicha kamayishi uchun $\frac{\partial u(P)}{\partial \ell} \leq 0$.

Haqiqatan ham, 1) $\Delta u(P_1)$ miqdor $u(P)$ funksiyaning $P_1 P_2$ kesmadagi o'zgarishidir. $\frac{\Delta u}{\Delta \ell}$ miqdor $u(P)$ skalyar funksiyaning $\vec{\ell}$ vektor yo'nalishidagi o'rtacha o'zgarish tezligini aniqlaydi. $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta \ell}$ esa, $u(P)$ skalyar funksiyaning $\vec{\ell}$ vektor yo'nalishidagi o'zgarish tezligini beradi.

2) $\vec{\ell}$ yo'nalishda $u(P)$ o'suvchi \Leftrightarrow

$$u(P_2) > u(P_1) \Leftrightarrow \frac{u(P_2) - u(P_1)}{|P_1 P_2|} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u(P_1)}{\partial \ell} \geq 0;$$

3) bu xossa ham 2) xossa kabi tekshiriladi.

Agar $\vec{\ell}$ yo'nalish koordinatalar o'qining yo'nalishlaridan biri bilan bir xil bo'lsa, u holda bu yo'nalish bo'yicha hosila tegishli xususiylar hosilaga teng, shuning uchun, masalan, $\vec{\ell}$ Ox o'qi bilan mos tushsa

$\cos \alpha = 1, \cos \beta = 0, \cos \gamma = 0$ va $\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}$ bo'ladi.

Yo'nalish bo'yicha hosila tushunchasini biror egri chiziq yo'nalishi bo'yicha umumlashtirish ham mumkin. Bu holda yo'naltiruvchi kosinuslar sifatida egri chiziqqa urinma vektori yo'nalishining yo'naltiruvchi kosinuslari olinadi.

1- misol. $u = xyz$ funksiyaning $M(-1,2,4)$ nuqtada, shu nuqtadan $M_1(-3,4,5)$ nuqtaga tomon yo'nalishdagi hosilasini toping.

▷ $\overline{MM_1}$ vektorni topamiz.

$\overline{MM_1} = (-3+1)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (5-4)\vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ va unga mos birlik

vektorni topamiz: $\vec{e}_0 = \frac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|} = \frac{-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$.

Shunday qilib, \vec{e}_0 vektor quyidagi yo'naltiruvchi kosinuslarga ega

$$\cos \alpha = -\frac{2}{3}, \cos \beta = \frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{1}{3}$$

Endi $u = xyz$ funksiyaning xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

va ularni $M(-1,2,4)$ nuqtada hisoblaymiz

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = 8 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 4 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(-8 - 4 - 1) = -\frac{26}{3}$$

«-» ishora berilgan yo'nalishda $u = xyz$ funksiyaning kamayishini ko'rsatadi. ◀

2-misol. $u = xz^2 + 2yz$ funksiyaning $M_0(1,0,2)$ nuqtadagi

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 + \cos t \\ y &= \sin t - 1 \\ z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

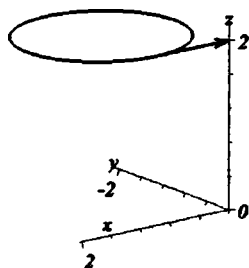
aylana bo'ylab olingan yo'nalish bo'yicha hosilasini toping.

▷ Aylananing vektor tenglamasi

ko'rinishi

$$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (1 + \cos t)\vec{i} + (\sin t - 1)\vec{j} + 2\vec{k}$$

Ixtiyoriy M nuqtadagi \vec{r} urunma vektorini topamiz (1.6 - rasm)



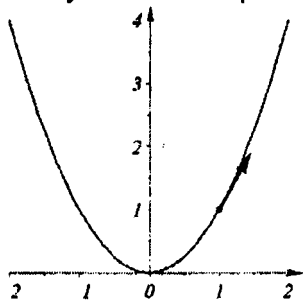
1.6 - rasm

$$\vec{r} = \frac{d\vec{F}}{dt} = -\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j}$$

berilgan $M_0(1,0,2)$ nuqta xOz tekisligida birinchi oktantada joylashganligi uchun $t = \pi/2$. Bu nuqtada \vec{r} ning qiymati

$$\bar{r}|_{M_0} = -\sin \frac{\pi}{2} \cdot \bar{i} + \cos \frac{\pi}{2} \bar{j} = -\bar{i}$$

Bundan ko'rinib turibdiki yo'naltiruvchi kosinuslar $\cos \alpha = -1$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 0$ ga teng. Berilgan $M_0(1,0,2)$ nuqtada xususiy hosilalarni topamiz



1.7 - rasm

egri chiziq bo'yicha $M_1(1,1)$ nuqtadan $M_2(2,4)$ nuqtaga yo'nalgan hosilasini toping (1.7 - rasm).

▷ $y = x^2$ parabola o'tkazilgan birlik urinma \bar{r}^0 vektorini topamiz. Urinmaning burchak koeffitsiyentini topamiz.

$$y' = 2x, \quad k = 2x|_{x=1} = 2.$$

Urinma to'g'ri chiziq $M_1(1,1)$ nuqtadan o'tadi va uning burchak koeffitsiyenti $k=2$ ga teng. Demak, $y-1=2(x-1)$. Bu to'g'ri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishda yozamiz: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2}$. $\bar{r}(1,2)$ vektor urinmaning yo'naltiruvchi vektoridir va uning yo'nalishi $M_1(1,1)$ nuqtadan $M_2(2,4)$ nuqtaga qarab yo'nalgandir. U holda $\bar{r}^0 = \frac{\bar{i}}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{j}$ birlik vektor bo'ladi. Demak, yo'naltiruvchi kosinuslar $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Endi xususiy hosilalarni topamiz $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Demak, yo'nalish bo'yicha hosila

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

ko'rinishda bo'ladi. ◀

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{M_0} = z^2|_{M_0} = 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{M_0} = 2z|_{M_0} = 4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}|_{M_0} = (2xz + 2y)|_{M_0} = 4$$

Demak

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial \bar{r}}|_{M_0} = 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = -4 \quad \blacktriangleleft$$

3- misol. Ushbu $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ ska-

lyar maydonning $M_1(1,1)$ nuqtadagi $y = x^2$

egri chiziq bo'yicha $M_1(1,1)$ nuqtadan $M_2(2,4)$ nuqtaga yo'nalgan

hosilasini toping (1.7 - rasm).

▷ $y = x^2$ parabola o'tkazilgan birlik urinma \bar{r}^0 vektorini topamiz.

Urinmaning burchak koeffitsiyentini topamiz.

$$y' = 2x, \quad k = 2x|_{x=1} = 2.$$

Urinma to'g'ri chiziq $M_1(1,1)$ nuqtadan o'tadi va uning burchak koeffitsiyenti $k=2$ ga teng. Demak, $y-1=2(x-1)$. Bu to'g'ri chiziq tenglamasini kanonik ko'rinishda yozamiz: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2}$. $\bar{r}(1,2)$ vektor urinmaning yo'naltiruvchi vektoridir va uning yo'nalishi $M_1(1,1)$ nuqtadan $M_2(2,4)$ nuqtaga qarab yo'nalgandir. U holda $\bar{r}^0 = \frac{\bar{i}}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{j}$ birlik vektor bo'ladi. Demak, yo'naltiruvchi kosinuslar $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Endi xususiy hosilalarni topamiz $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

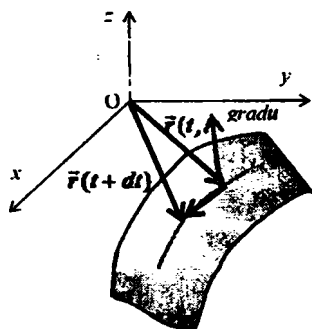
Demak, yo'nalish bo'yicha hosila

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

ko'rinishda bo'ladi. ◀

1.4. Skalyar maydon gradienti

$u = u(x, y, z)$ skalyar maydon berilgan bo'lsin.



1.8 - rasm

Ta'rif. Skalyar maydonning berilgan M nuqtadagi gradienti deb, gradu simvol orqali belgilanadigan va quyi-dagi tenglikdan aniqlanadigan vektorga aytiladi.

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.1)$$

Sath sirtida M nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy biror L chiziq joylashgan bo'lib uning parametrik tenglamasi $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ko'rinishda bo'lsin. Radius vektor differensiali

$d\vec{r}(t) = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$ L chiziq bo'ylab cheksiz kichik siljishni aniqlaydi.

Sath sirtida $du = 0$ bo'lganligidan

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = (\text{gradu}, d\vec{r}) = 0.$$

Bundan $\text{gradu} \perp d\vec{r}$ kelib chiqadi. L chiziqning ixtiyoriyligidan M nuqtadagi gradient sath sirtga ortogonal ekanligi kelib chiqadi (1.8 - rasm).

Yo'nalish bo'yicha hosila bilan gradient orasidagi bog'lanish. Yo'nalish bo'yicha hosilani gradu orqali quyidagicha yozishimiz mumkin

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = (\text{gradu}, \vec{\ell}^0) = |\text{gradu}| \cos \varphi \quad (1.2)$$

bunda $\vec{\ell}^0$ vektor $\vec{\ell}$ yo'nalishidagi birlik vektor bo'lib u quyidagiga teng

$$\vec{\ell}^0 = \frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|} = \vec{i} \cdot \cos \alpha + \vec{j} \cdot \cos \beta + \vec{k} \cdot \cos \gamma$$

φ gradu va $\vec{\ell}^0$ vektor orasidagi burchak (1.9 - rasm). Demak, biror nuqtada olingan yo'nalish bo'yicha hosila gradientning shu yo'nalishdagi proyeksiyasiga teng ekan.

Agar $\text{gradu} = 0$ bo'lsa $\frac{\partial u}{\partial \ell} = 0$ bo'ladi. Agar $\text{gradu} \neq 0$ bo'lsa, gradient

yo'nalishi bilan mos kelmagan barcha vektorlar uchun $\frac{\partial u}{\partial \ell} < |\text{gradu}|$ ekanligi kelib chiqadi.

$M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadagi urinma tekislik tenglamasi gradu va $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$ vektorlarning perpendikulyarligidan kelib chiqadi:

$$(\text{gradu}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

yoki

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y_0} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z_0} \cdot (z - z_0) = 0$$

Gradientning xossalari:

1) $u(M)$ skalyar maydon biror M_0 nuqtada eng tez o'sadigan yo'nalishi $\text{gradu}(M_0)$ yo'nalishi bilan mos keladi va u $|\text{gradu}(M_0)|$ ga teng.

2) $u(M)$ skalyar maydon biror M_0 nuqtada eng tez kamayadigan yo'nalishi $\text{gradu}(M_0)$ yo'nalishiga teskari yo'nalish bilan mos keladi va bu kamayish tezligi $|\text{gradu}(M_0)|$ ga teng.

3) $\text{gradu}(M_0)$ $u(M)$ maydonning M_0 nuqtasidan o'tadigan sath sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab yo'nalgan.

Bu xossalarni tekshiramiz.

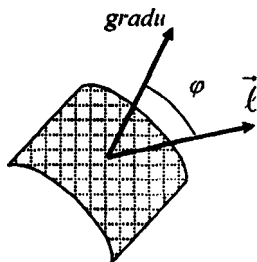
1. Agar $\cos \varphi = 1$ bo'lsa, (1.2) formuladan $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$ ning qiymati $|\text{gradu}(M_0)|$ ga tengligi kelib chiqadi. Ya'ni $\text{gradu}(M_0)$ va $\vec{\ell}$ vektor orasidagi burchak nolga teng.

2. $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \ell}$ ning eng kichik qiymatiga $\cos \varphi = -1$ bo'lganda erishadi. Ya'ni $\varphi = \pi$ bo'ladi va $\text{gradu}(M_0)$ bilan $\vec{\ell}$ vektor parallel bo'lib qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi.

3. Biz yuqorida bu xossani isbot qildik.

1 - 3 xossalari gradientning invariantlik (koordinatalar sistemasiga bog'liq bo'lmagan) ta'rifini beradi. Ya'ni koordinatalar sistemasining qanday bo'lishidan qat'iy nazar, gradient skalyar maydonning eng tez o'sadigan yo'nalishini va miqdorini aniqlaydi: $|\text{gradu}| = \max\left(\frac{\partial u}{\partial \ell}\right)$.

Shuni aytib o'tish kerakki gradient vektor funksiya bo'lib u faqat skalyar funksiyadan olinadi.



1.9 - rasm

Gradientning differensial xossalari:

1) $\text{grad}(u + v) = \text{gradu} + \text{grad}v$,

2) $\text{grad}(uv) = \text{gradu} \cdot v + u \cdot \text{grad}v$,

3) $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \text{gradu} - u \cdot \text{grad}v}{v^2}$,

4) $\text{grad}f(u) = f'_u \cdot \text{gradu}$,

5) $\text{grad}r = \frac{\vec{r}}{r}$,

6) $\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$, $\vec{a} = \text{const}$.

Bu xossalarning to'g'riligini tekshiramiz.

$$\begin{aligned}\text{grad}(u + v) &= \{(u + v)'_x, (u + v)'_y, (u + v)'_z\} = \\ &= \{u'_x, u'_y, u'_z\} + \{v'_x, v'_y, v'_z\} = \text{gradu} + \text{grad}v\end{aligned}$$

bo'lganligi uchun: 1) xossa o'rinalidir. 2), 3) va 4) xossalarning to'g'riligini tekshirish shu kabi amalga oshiriladi. 5) xossani tekshirish uchun $\vec{r} = \{x, y, z\}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, va shuning uchun

$r'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$. Xuddi shuningdek, $r'_y = \frac{y}{r}$, $r'_z = \frac{z}{r}$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\text{grad}r = \{r'_x, r'_y, r'_z\} = \left\{ \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\} = \frac{1}{r} \{x, y, z\} = \frac{\vec{r}}{r}$$

bo'ladi. $\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \text{grad}(a_1x + a_2y + a_3z) = \{a_1, a_2, a_3\}$ tenglikdan 6) xossa kelib chiqadi.

1- misol. $u = x - 2y + 3z$ skalyar maydon gradientini toping.

▷ (1.1) formulaga asosan

$$\text{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = 1 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 3 \vec{k} \blacktriangleleft$$

2 - misol. $u(r) = r^3$ maydonning $A(1, 2, 2)$ nuqtadagi maksimal o'sish qiymatini toping.

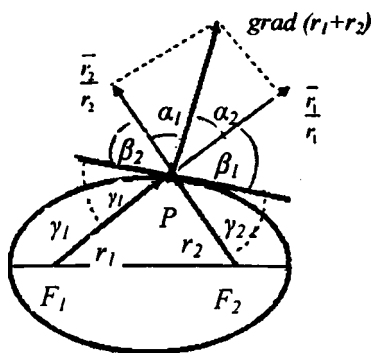
▷ Maydon gradientini topamiz:

$$\text{grad}u(r) = \text{grad}r^3 = 3r^2 \text{grad}r = 3r^2 \frac{\vec{r}}{r} = 3r\vec{r}.$$

Maydonning A nuqtadagi maksimal o'sish qiymati

$$|\text{grad}u(r)|_A = |3r\vec{r}|_A = 3r^2|_A = 3(x^2 + y^2 + z^2)|_A = 27$$

ga teng bo'ladi. ◀



1.10 - rasm

3-misol. Ellipsning optik xos-sasini isbot qiling: ellipsning biror fokusidan chiqqan nur ellipsdan qaytgandan so'ng ellipsning ikkin-chi fokusidan o'tadi.

▷ F_1, F_2 nuqtalar ellipsning fo-luslari bo'lsin (1.10-rasm): $\vec{r}_1 = \overline{F_1P}, \vec{r}_2 = \overline{F_2P}$. $u(P) = r_1 + r_2$ skalyar maydonni ko'raylik. Ellipsning ta'rifiga ko'ra $u(P) = r_1 + r_2 = const$ bo'lganda P nuqta ellipsda yotadi. Ya'ni ellips $u(P)$ skalyar maydon-

ning sath chizig'idir. Shuning uchun $grad(r_1 + r_2) = \frac{\vec{r}_1}{r_1} + \frac{\vec{r}_2}{r_2}$ P nuqtada ellipsning normali bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Shu bilan birga bu gradient $\frac{\vec{r}_1}{r_1}, \frac{\vec{r}_2}{r_2}$ vektorlardan tuzilgan parallelogramning dioganali bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Bu vektorlar birlik vektorlar bo'lgani uchun parallelogram rombdan iborat bo'ladi va $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$ bo'ladi. U holda $\angle\beta_1 = \angle\beta_2$ kelib chiqadi (bissektrissa urinmaga perpendikulyar). $\angle\gamma_1 = \angle\beta_1, \angle\gamma_2 = \angle\beta_2$ tengliklardan $\angle\gamma_1 = \angle\gamma_2$ kelib chiqadi. Ya'ni F_1 fokusidan chiqqan nur ellipsdan qaytgandan so'ng F_2 fokusidan o'tadi. ◀

1.5. Sirt normalining yo'naltiruvchi kosinuslari

Tenglamasi $F(x, y, z) = 0$ ko'rinishda berilgan sirtning $F = F(x, y, z)$ skalyar maydonning sath sirti sifatida qarash mumkin. Bu maydonning gradienti

$$gradF = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k} = \vec{n}$$

berilgan sirtning ixtiyoriy nuqtasida normal bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Shuning uchun sirtga o'tkasilgan normalning yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Demak, sirtga o'tkazilgan birlik normal vektorni qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \pm \frac{\text{grad} F(x, y, z)}{|\text{grad} F(x, y, z)|}.$$

Bu formulada ishorani tanlash sirtga o'tkazilgan normalning tanlanishiga qarab olinadi.

Izoh. $F(x, y, z) = 0$ sirtning yo'naltiruvchi kosinuslari $F(x, y, z)$ funktsiya differentsiallanuvchi bo'lib, xususiy hosilalar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan nuqtalardagina aniqlangan bo'ladi. Agar biror nuqtada xususiy hosilalar bir vaqtda nolga teng bo'lsa normal aniqlanmaydi.

Normali mavjud bo'lmagan sirtning nuqtalariga sirtning maxsus nuqtalari deyiladi. Masalan, konus sirtning uchi konus sirt uchun maxsus nuqtadir.

Sirt tenglamasi biror o'zgaruvchiga nisbatan oshkor ko'rinishda ifodalangan bo'lsin, masalan, $z = f(x, y)$. Buni quyidagicha yozish mumkin

$$z - f(x, y) = 0$$

Demak, $F(x, y, z) = z - f(x, y)$ deb qarash mumkin, shuning uchun

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

bo'ladi. Demak, $z = f(x, y)$ ko'inishda berilgan sirtning yo'naltiruvchi kosinuslari

$$\cos \alpha = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad \cos \beta = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

ko'rinishda bo'ladi, yoki qisqacha

$$\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \pm \frac{\text{grad}(z - f(x, y))}{|\text{grad}(z - f(x, y))|}$$

Misol. $z = x^2 + y^2$ paraboloidning tashqi tomoniga yo'nalgan birlik normal vektorni toping.

$$\triangleright f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ bo'lgani uchun, } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y,$$

yo'naltiruvchi kosinuslari

$$\cos \alpha = \frac{2x}{\pm \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \cos \beta = \frac{2y}{\pm \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \cos \gamma = \frac{1}{\pm \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Paraboloidga o'tkazilgan tashqi normal Oz o'qi bilan o'tmas burchak tashkil qilgani uchun «-» ishorasini olamiz. Shunday qilib paraboloidga o'tkazilgan birlik normal vektor

$$\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}},$$

ko'rinishda bo'ladi. ◀

Tayanch iboralar:

skalyar maydon, sath sirt, sath chizig'i, yo'nalish bo'yicha hosila, skalyar maydon gradient, sirt normali.

Takrorlash uchun savollar

1. Qanday maydon skalyar maydon deyiladi?
2. Skalyar maydon gradienti nima?
3. Sath sirtning ixtiyoriy nuqtasidagi gradient qanday yo'nalgan bo'ladi?
4. Yo'nalish bo'yicha hosila gradient orqali qanday ifodalanadi?
5. Gradientning qanday xossalari bor?
6. Gradientning invariant ta'rifi nima?
7. Sirtga o'tkazilgan normal qanday aniqlanadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi maydonlarning sath chiziqlarini toping.

a) $u = y - x$; b) $u = \frac{\sqrt{x}}{y}$