

# MAVZU. KVADRATIK FORMA VA UNI KANONIK KO'RINISHGA KELTIRISH.

## 1. Kvadratik formaning tarifi.

Sof matematik va amaliy xarakterdagi ko'pchilik masalalarda bir necha o'zgaruvchining formalari o'chraydi.

Bir necha o'zgaruvchining bir jinsli ikkinchi darajali ko'phadi bu o'zgaruvchilarning kvadratik formasi deb ataladi. Masalan,  $x_1, x_2, x_3$  o'zgaruvchilarning kvadratik formasi

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \quad (32.1)$$

ko'rinishidagi ko'phad bo'ladi, ikki o'zgaruvchining kvadratik formasi esa

$$F = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 \quad (32.2)$$

ko'rinishidagi ko'phad bo'ladi. Bu yerda  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$  lar o'zgarimas haqiqiy sonlar.

Kvadratik forma fazodagi har bir  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  vektorga F sonni (32.1) formula bo'yicha yoki tekislikdagi har bir  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  vektorga F sonni (32.2) formula bo'yicha mos qo'yadi.

$a_{ij}$  sonli koeffitsiyentlar kvadratik formani to'la aniqlaydi, uni matrisa ko'rinishida yozish mumkin. Buni ikki o'zgaruvchining (32.2) kvadratik formasi uchun keltiramiz. (32.2) ni bunday yozamiz:

$$\begin{aligned} F &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \\ &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2) = \\ &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (32.3)$$

Agar  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  ustun matrisani, transponirlangan  $x^* = (x_1, x_2)$  satr- matrisani

va  $a_{ij}$  koeffitsiyentlari tuzilgan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (32.4)$$

matrisani kiritsak, (32.3) kvadratlik forma ushbu matrisa ko'rinishni oladi:

$$F = x^* Ax \quad (32.5)$$

A matrisa ikki o'zgaruvchi kvadratlik formasi F ning matrisasi deb ataladi. U simmetrik matrisadir. SHunga o'xshash,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matrisa uch o'zgaruvchi kvadratlik formasining matrisasi bo'lishini ko'rsatish oson.

U simmetrik matrisadir.

1- m i s o l. Ikki o'zgaruvchining kvadratlik formasi

$$F = 17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2$$

ning matrisasini tuzing.

Yechish. Ravshanki,  $a_{11} = 17, a_{22} = 8, a_{12} = 6$ . F kvadratlik formaning matrisasi bunday yoziladi:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

U simmetrik matrisadir.

2-m i s o l. Uch o'zgaruvchining kvadratlik formasi

$$F = -3x_1^2 + x_2^2 - 8x_3^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_3 + 2x_2x_3$$

ning matrisasini yozing.

Yechish. Ravshanki,  $a_{11} = -3, a_{22} = 1, a_{33} = -8, a_{12} = 1, a_{13} = -5, a_{23} = 1$ .

Demak, kvadratik forma matrisasi bunday yoziladi :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

U simmetrik matrisadir.

## 2. Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi. Kvadratik formani kanonik ko'rinishiga keltirish.

O'zgaruvchilarning faqat kvadratlarini o'z ichiga olgan kvadratik forma kanonik ko'rinishga ega deyiladi. Shu sababli kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltirish degan so'z , shunday yangi bazisni (yangi koordinatalar sistemasini ) topishdan iboratki, unda kvadratik forma o'zgaruvchilarning ko'paytmasini o'z ichiga olmasin. Bu yangi bazisda (32.2) yoki (32.3) kvadratik forma ushbu

$$F = a(x'_1)^2 + b(x'_2)^2$$

ko'rinishida oladi yoki uning matrisa shakilidagi yozuvni

$$F = (x'_1, x'_2) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda bo'ladi. Buni quydagicha yozish mumkun:

$$F = x'^* A' x'$$

Bunda  $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$  vektorning yangi bazisdagi koordinatalari

Tuzilgan ustun,  $x' = (x'_1, x'_2) \rightarrow$  transponirlangan ustun, &

Kvadratik formilaning yangi bazisdagi matrisai. Yuqorida a&

Nidak agar yangi bazisi sifatida A matrisaning diagonalda xos qiymatlar joylashgan

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Diagonal matrisa korinishini oladi. U holda (33.1) kvadratik

Forma ushbu

$$F = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2$$

ko'rinishini oladi. Bu yerda  $\lambda_1, \lambda_2$  lar  $A$  matrisaning qiymatlari. Shunday qilib,  $A$

matrisani kvadratik korinishga kelishi uchun  $A$  matrisaning xos qiymatlari va xos vektorlarini topish lozim.

Yuqorida aytilganlarining hammasi uch o'zgaruvchining kvadratik formasi uchun ham to'g'ridir, u kanonik quydagicha yoziladi:

$$F = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \lambda_3 (x'_3)^2,$$

Bu yerda  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow$  kvadratik forma  $A$  matrisaning xos qiymatlari:

1-misol.  $F = 17x_1^2 + 17x_1x_2 + 8x_2^2$  kvadrat formani kanonik ko'rnishga keltiring,

Yangi bazisni (xos vektorlarni) toping.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Ko'rinishda bo'ladi.  $A$  matrisaning xos qiymatlari topamiz. Buning uchun

$$\begin{bmatrix} 17 - \lambda & 6 \\ 6 & 8 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Xarakteristik tenglamani tuzamiz. Uning yechimlari  $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 20$  boladi.

Berilgan kvadratik formaning kanonik shakli quydagicha bo'ladi:

$$F = 5(x'_1)^2 + 20(x'_2)^2.$$

Berilgan forma kanonik shakli oladigan yangi bazani topish uchun

$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 20$  xos qiymatlar bo'yicha xos vektorlarni ushbu

$$\begin{cases} (17 - \lambda)x'_1 + 6x'_2 = 0 \\ 6x'_1 + (8 - \lambda)x'_2 = 0 \end{cases}$$

Sestemani yechib topish lozim.

a) Agar  $\lambda = \lambda_1 = 5$  bolsa, (33.2) sistema yshbu

$$\begin{cases} 12x'_1 + 6x'_2 = 0 \\ 6x'_1 + 3x'_2 = 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} 2x'_1 + x'_2 = 0 \\ 2x'_1 + x'_2 = 0 \end{cases}$$

Ko'rinishni oladi. Bu sistema cheksiz ko'p yechmiga ega  $x'_1 = 1$  bo'lsin,

U holda  $x'_2 = -2, \vec{e}_2 = (1, -2)$  xos vektorga ega bolamiz.

b)  $\lambda = \lambda_2 = 20$  bolsin ,u holda (33.2) Sistema ushbu

$$\begin{cases} -3x'_1 + 6x'_2 = 0 \\ 6x'_1 + 12x'_2 = 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x'_1 - 2x'_2 = 0 \\ x'_1 + 2x'_2 = 0 \end{cases}$$

ko'rinishni oladi .  $x'_2 = 1$  bo'lsin, u holda  $x_1 = 2, \vec{e}_1 = (2, 1)$  xos

vektorga ega bolamiz.  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  vektorlar o'zaro perpendikulyar

bo'lib yangi bazisni hosi qiladi va unda, yuqorida aytilganidek,

kvadratik forma ushbu

$$F = 5(x'_1)^2 + 20(x'_2)^2$$

Korinishni oladi.

Mustaqil yechish uchun misollar

14.1. Kvadratik formani matritsa ko'rinishida yozing:

$$L = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 10x_2x_3$$

14.2. Kvadratlik formaning matritsasini toping:

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

14.3. Kvadratlik forma  $L(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$ , berilgan.

$x_1 = 2y_1 - y_2$ ,  $x_2 = y_1 - y_2$ , chiziqli almashtirish orqali hosil bo'lgan kvadratlik formani toping.

1.  $x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$

2.  $-2x_2^2 - x_1^2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$

3.  $x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$

**14.4.** Kvadratlik formani qanday aniqlanganligini toping:

1.  $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2$

2.  $x_1^2 + 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

3.  $12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2$

4.  $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$

14.5. Kvadratlik formani kanonik ko'rinishga keltiring:

1.  $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

2.  $7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

3.  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

4.  $17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

