

MAVZU. CHIZIQLI FAZO. YEVKLID FAZOSI

1. Chiziqli fazoning tarifi va misollar.

Chiziqli fazoning qism fazolari. Faraz qilaylik M to'plam bo'lsin. $M = \{x_1, x_2, \dots\}$. Bu to'plam elementlariga nisbatan Aniq bir to'plamni tushunish mumkin. Masalan: elementlari sonlardan, vektorlardan, matritsalaridan iborat bo'lishi mumkinagar elementlari vektorlardan iborat bo'lsa, M vektorlar to'plami deyiladi. Agar elementlari ko'phadlardan iborat bo'lsa, M ko'phadlar to'plamidan iborat bo'ladi va xokozolar.

Endi M ko'phadlar to'plami qanday bo'lmasin uning elementlarini «vektorlar» deb ataymiz. Bu «vektor» tushuncha, ya'ni elementlarni «vektor» deb atash keng ma'noda tushuniladi.

Ta'rif. Agar M to'plamda ikki vektorning (elementning) x_k, x_s yig'indisi x_k, x_s va biror x_k vektorni λ songa ko'paytmasi λx_k tushunchasi kiritilgan bo'lib quyidagi shartlar:

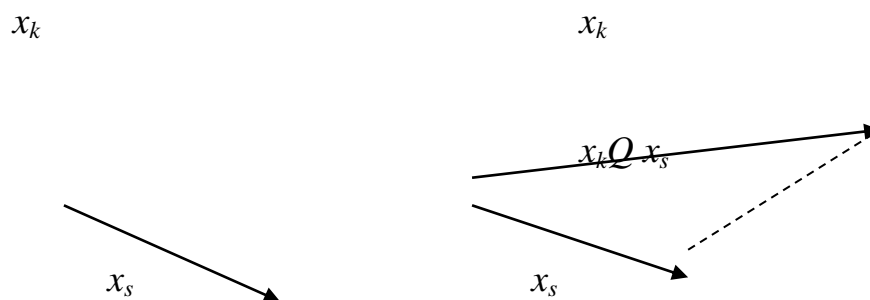
1. $\forall x_k, x_s \in M \quad x_k + x_s = x_n, \quad x_n \in M \quad \lambda x_k = x_m, \quad x_m \in M$
2. $x_k + x_s = x_s + x_k$
3. $x_k + (x_s + x_p) = (x_k + x_s) + x_p;$
4. $\exists \theta \in M, \quad x_k + \theta = x_k; \quad \theta$ -nol vektor deyiladi.
5. $\exists x'_k \in M, \quad x_k + x'_k = \theta; \quad x'_k$ -vektor x_k vektorga qarama-qarshi deyiladi.
6. $\lambda(x_k + x_s) = \lambda x_k + \lambda x_s;$
7. $\lambda(\alpha x_k) = (\lambda \alpha) x_k; \quad (\alpha \lambda$ -sonlar)
8. $1 \cdot x_k = x_k$

bajarilsa, u holda bunday M to'plam vektorlarning chiziqli fazosi deyiladi.

Agar shu shartlardan birortasi bajarilsa, u holda M to'plam chiziqli fazo deyiladi.

Misollar: 1. M to'plam XOY tekislikda yotuvchi geometrik ma'nodagi vektorlar to'plami bo'lsin.





Bu qaralayotgan M to'plam chiziqli fazodan iborat.

2. M to'plam n -chi tartibli determinanti 0 dan farqli bo'lgan kvadrat matritsadan iborat bo'lsin.

$$x_i = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Ikki matritsaning yig'indisi deb ularning mos elementlarining yig'indisiga aytiladi. λ sonni x_i ga ko'paytirish uchun x_i matritsaning hamma elementlari α ga ko'paytirish kerak. Bu qabul qilingan amallarga ko'ra 1,2,3 shartlarni tekshirish qiyin emas. 4 shart uchun 0 dan iborat bo'lgan matritsa qaraladi. 5 shart uchun ixtiyoriy matritsaga qarama-qarshi matritsa sifatida hamma elementlari qarama-qarshi ishora bilan olinadi. Demak matritsalar to'plami chiziqli fazoni tashkil etadi.

3. Darajasi n dan oshmaydigan $P_n(x)$ ko'phadlarni qaraylik;

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ko'phadlarni qo'shish, songa ko'paytirishni oddiy ma'noda ko'ramiz. Bu to'plam ham chiziqli fazoni tashkil etadi.

4. $[a, b]$ segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalar to'plamini olib qaraylik.

$$M = \{f_1(x), f_2(x), \dots\}$$

Ixtiyoriy $f_i(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda uzluksiz.

Ikki funksiyani tqo`shish va songa ko`paytirishni oddiy ma`noda qaraymiz. Demak uzluksiz funksiyalar to`plami ham chiziqli fazoni tashkil etadi.

2. Chiziqli fazoning o`lchovi va bazisi.

Faraz qilaylik R biror chiziqli fazo bo`lsin, bu chiziqli fazoda n ta vektorni olib qaraylik.

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad (1)$$

Ta`rif. Agar hech bo`lmasa bittasi 0 dan farqli bo`lgan

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \quad (2)$$

Sonlar mavjud bo`lib,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \dots + \lambda_n x_n \quad (3)$$

Tenglik bajarilsa u holda (II) vektorlar sistemasi chiziqli bog`langan deyiladi.

Ta`rif. Agar (3) tenglik faqat

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \dots, \lambda_n = 0 \quad (4)$$

Bo`lgandagina bajarilsa, u holda (II) vektorlar sistemasi chiziqli bog`lanmagan deyiladi.

Fazodan olingan ixtiyoriy n -ta vektorlar sistemasi chiziqli bog`langan yoki bog`lanmagan bo`lishi mumkin. Ular haqida quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. Agar (I) vektorlar sistemasi chiziqli bog`langan bo`lsa, u holda ulardan bittasini qolganlari orqali ifodalash mumkin.

Isbot. Faraz qilaylik (II) vektorlar sistemasi chiziqli bog`langan bo`lsin. Demak (3) tenglik λ_i larning birortasi 0 dan farqli bo`lganda o`rinlidir. Buni e`tiborga olib (3) ni quyidagicha yozamiz. Aniqlik uchun $\lambda_1 \neq 0$ deb qaraylik.

$$x = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} x_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} x_n, \quad -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \beta_2, \quad -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \beta_3, \dots$$
$$x = \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots + \beta_n x_n \quad (5)$$

Bu (5) tenglik x_1 vektorni qolganlari orqali ifodalashdan iboratdir.

Ta`rif. Agar R fazoda n ta vektor chiziqli bog`lanmagan bo`lsa, u holda R fazo n o`lchovli chiziqli fazo deyiladi va R_n deb belgilanadi.

Faraz qilaylik x_1, x_2, \dots, x_n (Ia) chiziqli bog`lanmagan bo`lsin.

$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ (6) chiziqli bog`langan bo`lsin. U holda (Ia) chiziqli erkli deyiladi.

Endi (6) sistema chiziqli bog`langan bo`lganligi uchun itsbotlangan teoremaga asosan ularning bittasini qolgaglari orqali ifodalash mumkindir. Shuning uchun x_{n+1} ni qolganlari orqali ifodalaymiz.

$$x_{n+1} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad (7).$$

Bu (7) x_{n+1} vektorning (Ia) ifodalanishi deyiladi.

Ta`rif. R_n fazoning n ta chiziqli bog`lanmagan vektorlar to`plami bu fazoning bazisi deyiladi.

Shunday qilib, agar R fazoda bazis vektorlar soni n bo`lsa, u holda bunday fazo n o`lchovli fazo deyiladi va R_n deb belgilanadi.

Masalan, XOY tekislikda vektorlar fazosi 2 o`lchovli fazoni tashkil etadi. R_2 fazo R_1 fazo to`g`ri chiziqlar ustida yotuvchi vektorlar fazosi bo`lib bir o`lchovlidir.

3. Chiziqli fazo elementini bazis bo`yicha yechish. Chiziqli fazoning qism fazolari.

Faraz qiliylik R_n biror n o`lchovli fazo bo`lsin uning bazisi x_1, x_2, \dots, x_n (I) vektorlardan iborat bo`lsin. Endi quyidagi vektorlar sistemasini olaylik.

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \quad (2)$$

Bu (2) chiziqli bog`langan. shuning uchun (2) dagi x ni qolganlari orqali ifodalash mumkin.

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \dots + \xi_n x_n \quad (3)$$

Bu (3) x vektorning bazis orqali ifodalanishi deyiladi. Bundagi

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n \quad (4)$$

Sonlar agar x vektorning (I) bazisdagi koordinatalari deyiladi. Agar biz (I) bazisdagi boshqa bir

Teorema. Hamma bir hil o`lchovli fazolar bir-biriga izomorfdir.

Isbot. Faraz qilaylik R_1 va R_2 fazolar bir hil o`lchovli bo`lsin. Ularning bazislarini mos ravishda e_1, e_2, \dots, e_n va f_1, f_2, \dots, f_n deb olaylik. Endi

$x \in R_1$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ vektorga monoton.

$y \in R_2$, $y = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n$ vektorni mos qilib qo`yamiz.

Bu moslik o`zaro bir qaymatlidir. Bunday moslik vektorlarni qo`shishda ham va soni vektorga ko`paytirishda ham saqlanadi. Demak n o`lchovli R_1 va R_2 fazolar bir-biriga izomorfdir, ya`ni $R_1 \sim R_2$. Teorema isbot bo`ldi.

Qism fazolar. Faraz qilaylik R_n biror fazo bo`lsin. Bu fazoning vektorlaridan M to`plam tuzaylik. Agar M to`plam tuzaylik. Agar M to`plam fazo shartlarini qanoatlantirsa u qism fazo deyiladi. Endi quyidagi vektorlarni olaylik.

$$x_1, x_2, x_3 \dots x_m \quad (1)$$

Bu vektorlardan quyidagi ifodani tuzaylik.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_m x_m = y_1 \quad (2).$$

Bu (2) yig`indi (II) sistemaning chiziqli kombinatsiyasi deyiladi. Endi (2) o`xshash

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \dots + \beta_m x_m = y_2 \quad (2a)$$

kombinatsiya tuzaylik. Bunday $\{y_k\}$ to`plam ya`ni

$$\{y_k\} = \{y_1, y_2, \dots\} = L \quad (3)$$

To`plam fazo shartlarini qanoatlantiradi. Demak L -qism fazo, ya`ni $L \in R_n$.

Bunday qism fazo chiziqli kobik deyiladi. buning o`lchovi R_n fazoning o`lchovidan ortiq emas. L -ning o`lchovini S - desak, u holda $S \leq n$.

R_n fazodan ixtiyoriy x_0, x_0 -tayinlangan. Ixtiyoriy x_k vektorni olib qaraylik.

$$x_0 + x_k = y_{0k}, k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

Vektorlar sistemani tuzaylik. y_{0k} vektorlar x_k vektorlarni x_0 bo`yicha siljishi deyiladi. Bunday $\{y_{0k}\} = H$ vektorlar to`plami R_n fazoning bir qismi bo`lib qism fazoni tashkil etadi. Buni tekshirib ko`rish mumkin. H qism fazolar chiziqli ko`phillik deyiladi.

Qism fazolarning yig`indisi va kesimi. Faraz qilaylik R_n chiziqli fazo

bo`lsin. Uning U_1 va U_2 qism fazolarni olaylik, ya`ni

$$U_1 = \{x_1, x_2, \dots\} \text{ va } U_2 = \{y_1, y_2, \dots\}$$

bo`lsin. U holda

$$W = U_1 + U_2 = \{x_i + y_i\}, \quad x_i \in U_1, U_2, y_i \in U_2$$

to`plam U_1 va U_2 qism fazolarning yig`indisi deyiladi. W -qism fazo ekanligini ko`rsatish mumkin. U_1 va U_2 qism fazolardagi vektorlarning ayrimlari umumiy bo`lishi mumkin. Bu umumiylerden tuzilgan U to`plam qism fazolarning kesimi deyiladi.

Hosil bo`lgan U kesim to`plam ham qism fazo ekanini ko`rsatish mumkin.

Endi $W = U_1 + U_2$ va $U = U_1 \cap U_2$ qism fazolarning o`lchovi haqida to`xtab o`tamiz.

$\dim R_n = n$ (dimension-o`lchov) deb olsak, u holda

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

tenglikni isbotlash mumkin.

Qism fazolarning yig`indisi bilan birgalikda ularning to`g`ri yig`indisi tushunchasi ham mavjud. Buni quyida ko`rib o`tamiz. $W = U_1 + U_2$ qism fazolarning yig`indisining vektori R_n fazoning vektori bo`lgani uchun

$z_{ij} \in M$ $z_{ij} = x_i + y_i$ vektorni U_1 va U_2 qism fazolarning boshqa vektorlari orqali ifodalash mumkin. Bunday ifodalanish faqat birgina emas bir nechta bo`lishi mumkin. Shu nuqtai nazardan qism fazolarning to`g`ri yig`indisi tushunchasini kiritamiz. Qism fazolarning to`g`ri yig`indisi qism fazolarning yig`indisi kabi aniqlanib undagi har bir vektor U_1 va U_2 qism fazo vektorlari o`ali faqat birgina ko`rinishda ifodalanadi.

Ana shunday qism fazolarning yig`indisi qism fazolarning to`g`ri yig`indisi deyiladi va uni $U_1 \oplus U_2 = \overline{W}$ deb belgilanadi. \overline{W} to`g`ri yig`indi har bir vektor birgina ko`rinishda ifodalanadi.

Teorema. R_n fazo W to'g'ri yig'indidan iborat bo'lishi uchun $U_1 \cap U_0 = 0$ (ya'ni kesim faqat bitta nol element) bo'lishi zarur va kifoyadir.

Bu teoremani boshqacha ko'rinishda ham ifodalash mumkin.

Teorema. R_n fazo U_1 va U_2 o'zining qism fazolarning yig'indisi bo'lishi uchun qism fazolar bazisining birlashmasi R_n fazo bazisini tashkil etishi zarur va kifoyadir.

4. Evklid fazosining ta'rifi. Evklid fazosida elementning normasi tushunchasi. Evklid fazosida ortonormallangan basis qurish.

Ta'rif-1. V – haqiqiy fazo bo'lsin. Agar $x, y \in V$ vektorlarning har bir juftiga haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa (bu sonni (x, y) shaklida belgilaymiz) va shu bilan birga bu moslik quyidagi to'rt xossaga ega bo'lsa (shu aksiomalarni qanoatlantirsa), V da skalyar ko'paytma aniqlangan deyiladi.

1^o. $(x, y) = (y, x)$, ya'ni skalyar ko'paytma simmetrik.

2^o. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$, (bunda λ - haqiqiy son)

3^o. $(x_1 - x_2, y) = (x_1, y) - (x_2, y)$ skalyar ko'paytmaning distributivligi).

4^o. Vektorning o'z-o'ziga skalyar ko'paytmasi manfiy emas: $(x, x) > 0$ ($x \neq 0$ bo'lgandagina bu ko'paytma nolga aylanadi).

1^o-4^o shartlarni qanoatlantiruvchi skalyar ko'paytma aniqlangan affin fazoni biz Yevklid fazosi deb ataymiz.

Misollar. 1. V fazo vektorlarini biz n ta har qanday $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ haqiqiy sonlar tizimiga aytaylik. Vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallarini quyidagicha ta'riflaymiz.

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_n + \eta_n),$$

$$\lambda x = (\lambda \xi_1, \lambda \xi_2, \dots, \lambda \xi_n).$$

Ushbu

$$x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \text{ ba } y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$$

vektorlarning skalyar ko'paytmasini

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n$$

formula bilan aniqlaymiz.

1^0-3^0 aksiomalar haqiqatan ham bajariladi, buni tekshirib ko'rish qiyin emas. 4^0 aksioma ham o'rinlidir, chunki $(x, x) = \sum \xi_i^2 \geq 0$ va $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$ bo'lgan holdagina $(x, x) = \sum \xi_i^2 = 0$.

3. 1-misolga ko'ra umumiyroq misolni ko'rib chiqaylik. Vektorni ilgariqicha, n ta haqiqiy sonlar to'plami deb qaraymiz. Vektorlarni qo'shish va ularni songa ko'paytirishni 1-misoldagi kabi aniqlaymiz.

Biror $\|a_{ik}\|$ matrisani olamiz. x va y vektorlar skalyar ko'paytmasini ushbu formula bilan aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} (x, y) = & a_{11}\xi_1\eta_1 + a_{12}\xi_1\eta_2 + \dots + a_{1n}\xi_1\eta_n + \\ & + a_{21}\xi_2\eta_1 + a_{22}\xi_2\eta_2 + \dots + a_{2n}\xi_2\eta_n + \\ & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + a_{n1}\xi_n\eta_1 + a_{n2}\xi_n\eta_2 + \dots + a_{nn}\xi_n\eta_n + \end{aligned} \quad (1)$$

(1) formula bilan aniqlangan ifoda skalyar ko'paytmaning hamma aksiomalarini haqiqatan qanoatlantirishi uchun $\|a_{ik}\|$ matrisaga qanday shartlar qo'yish kerak ekanligini ko'raylik.

Har qanday $\|a_{ik}\|$ matrisa uchun 2^0 va 3^0 aksiomalarning bajarilishiga to'g'ridan to'g'ri tekshirish bilan ishonamiz. 1^0 aksiomaning bajarilishi uchun, ya'ni (x, y) ifoda x va y ga nisbatan simmetrik bo'lishi uchun

$$a_{ik} = a_{ki} \quad (2)$$

bo'lishi, ya'ni $\|a_{ik}\|$ matrisaning simmetrik bo'lishi zarur va etarlidir.

4^0 aksioma

$$(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}\xi_i\xi_k \quad (3)$$

ifodaning har qanday $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ lar uchun manfiy bo'lmasligini hamda $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$ bo'lgandagina nolga aylanishini talab qilamiz.

Agar (3) formula bilan aniqlanadigan bir jinsli ko'phad («kvadratik forma») faqat manfiy bo'lmagan qiymatlarni kabul qilsa va ξ_i larning hammasi nolga teng bo'lgandagina nolga aylansa, u musbat aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

Demak, 4^0 aksioma (3) kvadratik formaning musbat aniqlangan bo'lishini talab qiladi.

Shunday qilib, agar har qanday $\|a_{ik}\|$ matrisa simmetrik bo'lsa (2^0 shart) va unga mos kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lsa, u holda bu matrisa (1) formula bilan aniqlanadigan skalyar ko'paytmani tasvirlab beradi.

Agar $\|a_{ik}\|$ matrisa matrisa sifatida birlik matrisani olsak, ya'ni $a_{ii} = 1$ va $a_{ik} = 0$ ($i \neq k$) deb olsak, u holda (x, y) skalyar ko'paytma

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$$

ko'rinishni oladi va biz 1-misolda aniqlangan evklid fazosini hosil qilamiz.

4. (a, b) intervalda berilgan uzluksiz funksiyalarni V fazoning vektorlari deb ataylik. Bunday funksiyalarning skalyar ko'paytmasi, bu funksiyalar ko'paytmasining integrali sifatida beramiz:

$$\int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Skalyar ko'paytmani bunday berilganda 1^0-4^0 aksiomalar bajariladi.

5. t bo'yicha tuzilgan va darajasi $n-1$ dan oshmaydigan ko'phadlarni vektorlar deb kabul qilamiz. Ikki ko'phad skalyar ko'paytmasini oldingi misoldagi kabi aniqlaymiz.

$$(P, Q) = \int_a^b P(t)Q(t)dt.$$

1^0-4^0 aksiomalar to'g'riligi 4-misoldagidek tekshiriladi.

2. Vektorning uzunligi. Vektorlar orasidagi burchak. Kiritilgan skalyar ko'paytma tushunchasi yordami bilan vektorning uzunligi, hamda vektorlar orasidagi burchaklar haqida ta'riflar beramiz.

Ta'rif-2. Yevklid fazosida x vektorning uzunligi deb

$$\sqrt{(x, x)} \tag{4}$$

songa aytiladi. x vektorning uzunligini $|x|$ bilan belgilaymiz.

Vektorlar orasidagi burchak, vektoring uzunligi hamda vektorlarning skalyar ko'paytmalari odatdagi munosabatlar bilan bog'langan: vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning uzunliklari ko'paytmasi bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng. Ammo bu jumladagi «vektorlar orasidagi burchak» so'zlaridan tashqari hamma so'zlarning ma'nosi bizga tushunarli bo'lishi uchun quyidagi ta'rifni beramiz.

Ta'rif-3. x va y vektorlar orasidagi burchak deb

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

songa aytamiz, ya'ni

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \quad (5)$$

deb qabul qilamiz. Agar x va y vektorlar orasidagi burchak $\frac{\pi}{2}$ ga teng bo'lsa, ya'ni

$$(x, y) = 0$$

bo'lsa, x va y vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi.

Kiritilgan tushunchalar yordami bilan elementar geometriyaning qator teoremlarini evklid fazosiga ko'chirish mumkin.

Bir misol ko'rib chiqaylik. Agar x va y vektorlar ortogonal vektorlar bo'lsa, y holda $x+y$ vektorni tomonlari x va y bo'lgan to'g'riburchak deb hisoblash tabiiydir. Endi

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

ekanini, ya'ni to'g'ri to'rtburchak diagonali uzunligining kvadrati, uning parallel bo'lmagan ikki tomoni uzunliklari kvadratlari yig'indisiga teng (Pifagor teoremasi) ekanini isbot qilaylik.

Isbot. Vektorlar uzunligi kvadratlarining ta'rifiga muvofiq:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y)$$

Skalyar ko'paytmaning distributivligiga asosan (3^0 aksioma):

$$(x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y).$$

x va y vektorlarning ortogonaligidan:

$$(x, y) = (y, x) = 0.$$

Demak,

$$|x + y|^2 = (x, x) + (y, y) = |x|^2 + |y|^2,$$

shuni isbot qilish kerak edi.

Bu teoremani umumlashtirish mumkin. Agar x, y, z, \dots vektorlar juft-jufti bilan ortogonal bo'lsa, u holda

$$|x + y + z + \dots|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \dots$$

bo'ladi.

3. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. O'tgan punktda biz bir kamchilikka yul qo'ydik. Biz x va y vektorlar orasidagi φ burchakni

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

formula bilan aniqladik. φ ni bu tenglikdan aniqlash mumkin bo'lishi uchun:

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq +1$$

yoki, baribir,

$$\frac{(x, y)^2}{|x|^2 \cdot |y|^2} \leq 1,$$

ya'ni

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) \quad (6)$$

ekanini isbot qilish kerak. Bu tengsizlik Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi deyiladi.

Shunday qilib, ikki vektor orasidagi burchakni (5) formula bilan aniqlash uchun, biz Koshi-Bunyakovskiy tengsizligini isbot qilishimiz kerak.

Buni isbot qilish uchun $x - ty$ vektorni qarab chiqaylik, bu erda t – ixtiyori haqiqiy son. Skalyar ko'paytmaning 4^o aksiomasiga asosan:

$$(x - ty, x - ty) \geq 0,$$

har qanday t uchun:

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) \geq 0$$

Biz ko'ramizki, chap tomondagi t ga nisbatan kvadrat uchxad faqat manfiy bo'lmagan qiymatlarnigina qabul qiladi. Shuning uchun ikkita boshqa-boshqa haqiqiy ildizi bo'lishi mumkin emas (haqiqiy har xil t_1 va t_2 ildizlarga ega bo'lgan kvadrat uchxadning ko'rinishi $a(t - t_1)(t - t_2)$ bo'ladi va demak, ishorasini o'zgartiradi). Binobarin,

$$t^2(y, y) - 2t(x, y) + (x, x) = 0$$

kvadrat tenglamaning diskriminanti musbat bo'la olmaydi, ya'ni

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) = 0$$

bo'ladi. Shuni isbot qilish kerak edi.

Agar a_{ik} sonlar (2) va (3) shartlarni qanoatlantirsa, u holda ushbu tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$\left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k \right)^2 \leq \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k \right) \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \eta_i \eta_k \right)$$

Koshi-Bunyakovskiy tengsizligining natijasi bo'lgan tengsizlikka misol keltiramiz.

Lemma-1. V evklid fazosida har qanday x va y vektorlar uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (7)$$

Isbot.

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y),$$

ammo (Koshi-Bunyakovskiy tengsizligiga asosan) $2(x, y) \leq 2|x||y|$ bo'lgani uchun

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) \leq (x, x) + 2|x||y| + (y, y) = (|x| + |y|)^2$$

ya'ni $|x + y| \leq |x| + |y|$, shuni isbot qilish kerak edi.

Lemma isbotlandi.

11.1.Misol $a_1(0; 1; -3)$, $a_2(3; 5; 0)$, $a_3(1; 2; -1)$ vektorlar sistemalariga tortilgan chiziqli qism osti fazosining bazislaridan birini, o'lchamini hamda ortonormallangan bazisini topamiz:

Buning uchun $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \theta$ vektor tenglama umumiy yechimini Gauss-Jordan usulida quramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 15 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

x_1, x_3 noma'lumlar umumiy yechimning bazis noma'lumlari. Demak, mos ravishda, a_1, a_3 vektorlar tizimi berilgan sistemaning bazislaridan birini tashkil etadi. Tizim 2 ta vektordan tarkib topgani uchun, berilgan vektorlar sistemasining o'lchami 2 ga teng.

Bazisni tashkil qiluvchi $a_1(0; 1; -3)$ va $a_3(1; 2; -1)$ vektorlarni ortogonallaymiz:

$$b_1 = a_1(0; 1; -3)$$

$$b_2 = a_3 \frac{(b_1 \cdot a_3)}{(b_1 \cdot b_1)} b_1 = (1; 2; -1) - \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1)}{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3)} (0; 1; -3) = (1; 2; -1) - \frac{5}{10} (0; 1; -3) = (1; \frac{3}{2}; \frac{1}{2})$$

hosil bo'lgan ortogonal sistema vektorlarini butun koordinatali vektorlarga aylantirib, $b_1(0; 1; -3)$ va $b_2(2; 3; 1)$ ni olamiz. Bu ortogonal sistemaning har bir vektorini birlik ko'rinishga keltiramiz, ya'ni ortonormallashtiramiz:

$$\frac{b_1}{|b_1|} = \frac{(0; 1; -3)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-3)^2}} = (0; \frac{1}{\sqrt{10}}; -\frac{3}{\sqrt{10}})$$

$$\frac{b_2}{|b_2|} = \frac{(2; 3; 1)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = (\frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}})$$

11.2. Misol. $x(3; -2; 4)$ vektor e_1, e_2, e_3 bazisda berilgan. Vektorning

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + 2e_2 - 3e_3 \\ e_2' = e_1 + e_2 + e_3 \\ e_3' = 2e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases}$$

bazisdagi koordinatalarini topamiz:

Koeffitsientlar matritsasi P ning transponirlangan matritsasi P^T ni hosil qilamiz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

U holda x vektorning dastlabki bazisdagi koordinatalari uning yangi bazisdagi koordinatalari orqali (matritsa shaklida $x = P^T x'$) quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3 = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -12 & -19 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/12 \\ 0 & 0 & 1 & 19/12 \end{array} \right)$$

Demak, dastlab berilgan $x(3; -2; 4)$ vektorning yangi bazisdagi koordinatalari:

$$\mathbf{x} \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{12}; \frac{19}{12} \right)$$

Ta'rif: $P \cdot P^T = P \cdot P^{-1} = E$ shartni bajaruvchi P matritsaga ortogonal matritsa deyiladi.

11.3. Misol. Quyidagi matritsa ortogonal matritsa bo'lishini tekshiramiz :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$P \cdot P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Demak, berilgan P matritsa ortogonal matritsa bo'ladi.