

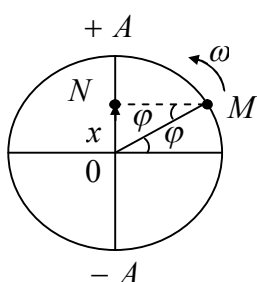
МЕХАНИК ТЕБРАНИШЛАР

Режа:

1. Гармоник тебранма ҳаракат.
2. Маятниклар.
3. Гармоник тебранишлар энергияси.

Маълум вақт оралиғида такрорланадиган жараён ёки ҳаракатга тебранма ҳаракат дейилади. Система мувозанат вазиятидан чиқарилгандан кейин, унга ташқи кучлар таъсир қилмаса, бундай тебраниш эркин тебранишлар дейилади. Акс ҳолда тебранишлар мажбурий тебранишлар бўлади. Қаршилиқ кучлари таъсирида тебранишлар сўнади. Автотебранишлар - таъсир қилиш вақтини ўзи белгилайдиган ташқи мажбурловчи кучлар таъсиридаги тебранишлар.

Тебранма ҳаракат табиатда жуда кўп тарқалган ва ҳар хил бўлади, лекин унинг энг оддийси - гармоник тебранишдир. Фараз қилайлик M материал нукта соат стрелкасига қарши A радиусли айланада ω бурчак тезлиги билан айланаяпти.



1-расм

M нинг проекцияси N бўлса, у ҳолда N , O марказ атрофида тебраниб туради. Агар ON силжиш x деб белгиланса, у ҳолда $x = A \sin \varphi$ деб ёзишимиз мумкин. $\varphi = \omega t$ бўлганлиги учун

$x = A \sin \omega t$ бўлади. Бундан ташқари $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \rightarrow$

$$x = A \sin \frac{2\pi}{T} t \text{ ёки } x = A \sin 2\pi\nu t \quad (1)$$

Синус ёки косинус қонуниятлари билан юз берадиган тебранишлар гармоник тебранишлар дейилади, $\varphi = \omega t$ -тебранишлар фазаси деб аталади ва у силжишнинг исталган пайтдаги қийматини аниқлайди. Гармоник тебранма ҳаракат тенгламасининг дифференциал кўриниши: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (2).

N нуктанинг тебраниш тезлиги қуйидаги ифода орқали аниқланади:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t = \omega A \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3)$$

v вақтга боғлиқ, бошқача айтганда, бундай тебраниш тезланишгаэга:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi) = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x \quad (4)$$

Тезликнинг тебраниши силжишга қараганда $\frac{\pi}{2}$ га илгарилаб кетади, тезланиш эса тескари фазада юз беради.

m массали тебранма ҳаракат қилаётган жисмга таъсир қилаётган куч:

$$F = ma = -m\omega^2 x \quad (5)$$

бу ерда $k = m\omega^2$ дейиш мумкин. F силжишга қарама-қарши йўналган. Демак гармоник тебранишларни силжишга пропорционал, лекин унга қарама-қарши йўналган кучлар юзага келтирар экан. Эластик кучлар ҳам шундай йўналган бўлганлиги учун бундай кучларни квазиэластик кучлар деб аташ мумкин. Агар масса m ва k маълум бўлса:

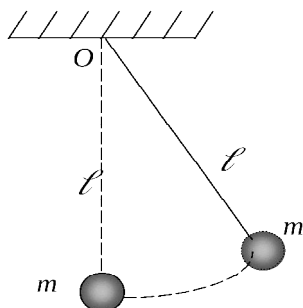
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6) \quad \text{ва} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (7)$$

Чўзилмайдиган вазнсиз ип ва унга осилган массаси m бўлган моддий нуктадан иборат тизим математик маятник дейилади. Маятникни мувозанат вазиятдан чиқарсак, яъни уни мувозанат вазиятига нисбатан φ бурчакка оғдирсак, мувозанат вазиятига қайтарувчи куч пайдо бўлади. Бу куч сон жиҳатидан қуйидагига тенг:

$$f_1 = mg \sin \varphi. \quad (8)$$

Бу куч пуржинанинг қайишқоқлик кучига ўхшаш. Чунки бу куч ҳам, пуржинанинг қайишқоқлик кучи ҳам тебранувчи тизимни мувозанат вазиятига қайтаришга интилади. Шу туфайли f_1 куч квазикайишқоқ куч деб юритилади. Тизимни мувозанат вазиятига қайтарувчи f_1 куч таъсирида массаси m бўлган шарча a тезланиш олади. Бу хусусий ҳол учун Ньютоннинг иккинчи қонуни қуйидагича ёзилади:

$$m\vec{a} = -m\vec{g} \sin \varphi, \text{ бундан } \vec{a} = -\vec{g} \sin \varphi \quad (9)$$



Манфий ишора $\vec{f}_1$ кучнинг йўналиш силжишга қарама-қарши эканлигини билдиради. Математик маятник φ бурчакка четланганда шарча босиб ўтган траекторияни радиуси l бўлган айланининг ёйи деб ҳисоблаш мумкин, бунда бурчак тезланиш чизикли тезланиш билан қуйидагича боғланган:

$$a = \varepsilon l = \ddot{\varphi} l,$$

бу ерда $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ эканлиги эътиборга олинди. Энди бу ифодани (9) га қўйсак: $\ddot{\varphi} l = -g \sin \varphi$ ёки $\ddot{\varphi} l + g \sin \varphi = 0$ (10). Маятникнинг

кичик тебранишлари билан чегараланамиз, у ҳолда $\sin \varphi \approx \varphi$ деб қабул қилиш мумкин. Шунга кўра (10) ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$\ddot{\varphi} l + g \varphi = 0 \quad \text{ёки} \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

Охирги тенгламада $\frac{g}{l} = \omega_0^2$ (11) десак, натижада $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ (12) кўринишдаги дифференциал тенгламага эга бўламиз. (12) тенгламанинг ечими:

$$\varphi = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad \text{ёки} \quad \varphi = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (13)$$

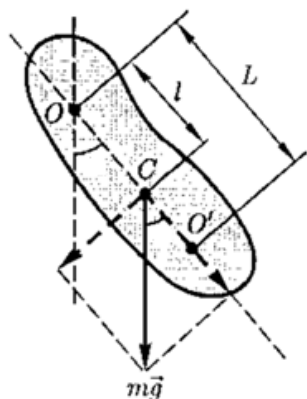
эканлиги табиий (бунда α – тебранишнинг бошланғич фазаси, A – четланиш бурчагининг амплитуда қиймати. (12) ва (13) тенгламалар гармоник ҳаракат тенгламаларидир. Демак, кичик тебранишларда математик маятник ўзининг мувозанат вазияти атрофида

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ (14) доиравий частота билан тебранма ҳаракат қилади. Бу частота математик

маятникнинг хусусий тебраниш частотаси дейилади. Иккинчи томондан $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

эканлигидан математик маятникнинг тебраниш даври $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (15) бўлади.

Бундан кўринадики, математик маятникнинг тўла тебраниш даври фақат унинг узунлигига ҳамда оғирлик кучи таъсирида жисмнинг эркин тушиш тезланишига боғлиқ бўлиб, тебранувчи жисмнинг массасига ва тебраниш амплитудасига боғлиқ эмас



Физик маятник деб, оғирлик марказидан ўтмайдиган ўқ атрофида тебранма ҳаракат қила оладиган қаттиқ жисмга айтилади. Маятникни мувозанат вазиятидан бирор бурчакка оғдирсак оғирлик кучининг ташкил этувчиси уни мувозанат вазиятига қайтаришга интилади. Маятник оғирлик марказидан ўтаётганда ўз инерцияси таъсирида ҳаракатини давом эттиради ва бу жараён такрорланади, яъни у мувозанат вазияти атрофида тебранма ҳаракат қилади.

Агар осилиш ўқидаги ишқаланиш кучини ҳисобга олмасак, тебраниш оғирлик кучининг $\vec{P}_\tau = -m\vec{g} \sin \varphi$ ташкил этувчиси туфайли содир бўлади. Манфий ишора кучининг четланиш ($\varphi \sim \sin \varphi$) га қарама-қарши эканлигини билдиради.

$\vec{p}_\tau$ нинг таъсирида маятникни мувозанат вазиятига қайтарувчи

$$M = -mgl \sin \varphi \quad (16)$$

га тенг куч моменти вужудга келади; бунда l -осилиш ўқиға нисбатан $\vec{P}_\tau$ кучнинг елкаси.

Осилиш ўқиға нисбатан жисмнинг инерция моментини I билан белгиласак жисмга қуйилган куч моменти: $M = I\varepsilon = I\dot{\omega} = I\ddot{\varphi}$ (17). (16) ва (17) тенгликлардан қуйидагига эга бўламиз: $I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$ (18) кичик тебранишлар учун $\sin \varphi \approx \varphi$ деб қабул қилиб (18)

тенгликни $I\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0$ ёки $\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0$ (19) кўринишда ёзамиз. Охирги ифодага

$\frac{mgl}{I} = \omega_0^2$ (20) белгилаш киритамиз; бунда ω_0 -физик маятникнинг хусусий тебраниш

частотаси дейилади. Шунда (19) дан $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$ (21). Бу тенглама гармоник тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламасидир, (21) да силжиш ўрнида оғиш бурчаги (φ) қатнашаяпти. Маълумки унинг ечими $\varphi = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$ ёки $\varphi = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$

(22) кўринишга эга. Кичик тебранишлардан физик маятник $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$ (23) хусусий

частота билан ўзининг мувозанат вазияти атрофида гармоник тебранма ҳаракат қилади.

Унинг тебраниш даври $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$ (24) формула билан аниқланади. Бу формулага

кўра физик маятникнинг тебраниш даври массаси (m) га боғлиқдек кўринади; аслида эса у массага эмас, балки массанинг маятникда тақсимланишини ифодаловчи катталиқ I/m га боғлиқ. (24) тенгликни худди математик маятникнинг тебраниш даврига ўхшатиб

$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ кўринишда ёзиш мумкин, бундаги $L = \frac{I}{ml}$ -физик маятникнинг

келтирилган узунлиги дейилади.

Даврий ўзгарувчан ташқи куч таъсирида тизимда вужудга келадиган тебранишларга мажбурий тебранишлар дейилади. Мажбурий тебранишларнинг эркин тебранишлардан фарқи шундаки, мажбурий тебранишларнинг частотаси тизимнинг ўз хусусиятидан келиб чиқмай, балки ташқи таъсирнинг частотаси билан аниқланади. Қуйида биз энг оддий ҳолни тизимга таъсир этувчи ташқи куч гармоник қонун билан ўзгарадиган ҳолни қараб чиқиш билан чегараланамиз,

яъни ташқи куч ω частота билан $F = F_0 \cos \omega t$ тарзда ўзгариши, бунда $\vec{F}_0$ — ташқи кучнинг амплитуда қиймати. Тинч турган тизимга ўзгарувчан ташқи куч таъсир қилса, у ўзининг мувозанат вазиятидан чиқа бошлайди. Мазкур жараёнда ташқаридан берилган энергия қисман тизимнинг ҳаракат энергиясини оширишга сарфланса, қисман ишқаланиш кучини ҳамда муҳитнинг қаршилик кучини енгилшга сарфланади. Шу билан бирга тебранишнинг амплитудаси орта боради. Бирор вақтдан кейин тизим томонидан ишқаланиш кучини ва муҳитнинг қаршилик кучини енгилшга вақт бирлиги ичида сарфланаётган энергия ташқаридан узатилаётган энергияга тенг бўлиб қолади. Шу пайтдан бошлаб тизимнинг тебраниши барқарорлашади, яъни у ўзгармас амплитуда билан тебрана бошлайди. Барқарор ҳолатга келган тебранишларни қараб чиқайлик.

Мажбурий тебранма ҳаракат қилаётган тизимга бир вақтнинг ўзида квазиқайишқоқ куч ($-kx$) ва муҳитнинг қаршилик кучи ($-r \frac{dx}{dt}$) дан ташқари, ташқи куч ($F = F_0 \cos \omega t$) ҳам таъсир этади. Бинобарин, мажбурий тебранишлар учун Ньютоннинг иккинчи қонунини

қуйдагича ёзишимиз мумкин: $m = \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$ бу тенгламани

куйидагича кўринишда ёзамиз: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$ (25). Барқарор ҳолатга

келган мажбурий тебраниш ω частота билан содир бўлишини кўзда тутсак тенгламани ечим:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (26)$$

кўринишда ифодалаш мақсадга мувофиқ бўлади.

Тизимнинг мажбурий тебраниш амплитудаси

$$A = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (27)$$

Мажбурий тебраниш фазаси $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ (28)

(27) ва (28) тенгликлардан кўринадик, мажбурий тебраниш амплитудаси ва фазаси ташқи кучнинг ўзгариш частотаси (ω) га боғлиқ равишда ўзгаради ($\omega_0 = \text{const}$).

Энергиянинг сақланиш қонунига кўра берк тизимнинг тўла энергияси вақт ўтиши билан ўзгармай қолади: тебраниш жараёнида тизимнинг потенциал энергияси кинетик энергиясига ва аксинча кинетик энергия потенциал энергияга айланиб туради. Жисм ўзининг мувозанат вазиятидан энг катта четланганда унинг тўла энергияси фақат потенциал энергиядан, мувозанат вазиятдан ўтаётганда эса унинг тўла энергияси фақат кинетик энергиядан иборат бўлади.

Мувозанат вазиятидан x масофага силжитилган пружинали маятникнинг потенциал

энергияси: $E_n = \frac{kx^2}{2}$. $k = \omega_0^2 m$ ва $x = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$ эканлигини эътиборга олиб

юқоридаги тенгликни куйидаги кўринишда ёзамиз:

$$E_n = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (29)$$

Мазкур тенглама тизим потенциал энергиясининг вақт ўтиши билан ўзгаришини ифодалайди. Тезлиги нолдан фарқли бўлган барча вазиятларда массаси m бўлган моддий

нуқтанинг кинетик энергияси ҳам нолдан фарқли, яъни $E_k = \frac{1}{2} m v^2$. Гармоник тебранма

ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг тезлиги ҳам гармоник тарзда ўзгаради. Шунинг учун тебранаётган моддий нуқтанинг кинетик энергияси

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) \quad (30)$$

кўринишда ёзилади.

(29) ва (30) ифодалардан кўринадик, моддий нуқтанинг потенциал ва кинетик

энергиялари вақт ўтиши билан 0 дан $\frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$ гача гармоник равишда ўзгаради.

Энергиянинг сақланиш қонунига мувофиқ гармоник тебранма ҳаракат қилаётган моддий нуқтанинг тўла энергияси E унинг потенциал ва кинетик энергияларининг йиғиндисидан иборат:

$$E = E_n + E_k = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 [\sin^2(\omega_0 t + \alpha) + \cos^2(\omega_0 t + \alpha)]$$

Шундай қилиб, гармоник тебранма ҳаракатининг тўла энергияси

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \text{const} \quad (31).$$

НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ

1. Тебранма ҳаракат деб нимага айтилади?
2. Қандай тебранишларга гармоник тебранишлар дейилади?
3. Гармоник тебранма ҳаракат тенгламасини изоҳланг?
4. Математик ва физик маятникларнинг тебраниш даври формулаларини келтириб чиқаринг ва изоҳланг?
5. Гармоник тебранма ҳаракатда тезлик ва тезланишни тушунтиринг?
6. Тебраниш даври, частотаси ва амплитудасини тушунтиринг?

АДАБИЁТЛАР

1. Douglas C. Giancoli, Physics: Principles with Applications, Prentice Hall; 6 th edition January 17, 2014, USA
2. Султанов Н.А. “Физика курси” Т. “Фан ва технология” 2007 йил
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М., Курс физики. Учебник -М.: “Академия”, 2007
4. Трофимова Т.И. Курс физики. Учебник. -М.: «Академия», 2007
5. google.com