

АЙЛАНМА ҲАРАКАТ ДИНАМИКАСИ

Режа:

1. Куч моменти. Инерция моменти.
2. Айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламаси.
3. Импульс моменти ва унинг сақланиш қонуни.
4. Айланма ҳаракат қилаётган жисм энергияси.

Куч моменти. Айланиш ўқиға нисбатан куч моменти (ёки айлантирувчи момент):

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad (1)$$

бунда $\vec{F}$ моддий нуктага таъсир этувчи барча кучларнинг тенг таъсир этувчисидир. Куч моменти $\vec{M}$ псевдовектор бўлиб, у $\vec{r}$ ва $\vec{F}$ векторлар ётган текисликка тик йўналган, йўналиши эса ўнг винт қондаси билан аниқланади, яъни ўнг винтни $\vec{r}$ дан $\vec{F}$ га қараб бураганда винтнинг илгарилама ҳаракати $\vec{M}$ нинг йўналиши билан мос тушади. Куч моментининг сон қиймати, равшанки:

$$M = Fr \sin \alpha = Fl \quad (2)$$

$\alpha - \vec{r}$ ва $\vec{F}$ векторлар орасидаги бурчак $l = r \sin \alpha$ эса берилган О нуктадан $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғига туширилган тик чизиқнинг узунлиги (О нуктадан $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиғигача бўлган энг яқин масофа) бўлиб, у куч елкаси дейилади.

n та моддий нуктадан иборат тизимни қарайлик. Тизимдаги i-моддий нуктанинг О нуктага нисбатан вазиятини $\vec{r}_i$ радиус-вектор билан ва унга таъсир қилувчи $\vec{F}_i$ орқали белгиласак, берилган О нуктага нисбатан мазкур кучнинг моменти:

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i] \quad (3)$$

тарзда ифодаланади. Берилган О нуктага нисбатан моддий нукталар тизимига таъсир этувчи куч моменти деб ҳар бир моддий нуктага қўйилган куч моментларининг вектор йиғиндисига айтилади:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] \quad (4)$$

бунда $\vec{F}_i - i$ моддий нуктага таъсир этувчи ташқи кучни ифодалайди. Тизимидаги ҳар бир моддий нуктага таъсир этувчи ташқи кучдан ташқари, моддий нукталарнинг ўзаро таъсири туфайли вужудга келувчи кучлар ҳам мавжуд. Маълумки, бу кучлар ички кучлар дейилади ва уларнинг вектор йиғиндиси нолга тенг бўлганлиги туфайли (4) ифодада фақат ташқи кучларгина акс эттирилади.

Инерция моменти. Моддий нуктанинг инерция моменти деб, шу нукта массасининг айланиш ўқиғача бўлган масофанинг квадратиға кўпайтмасига айтилади:

$$J = mr^2 \quad (5)$$

Системанинг инерция моменти (каттиқ жисмнинг) деб, система моддий нукталарининг массалари йиғиндисини айланиш ўқиғача бўлган масофаларнинг кўпайтмасига тенг бўлган катталиққа айтилади: $J = \sum m_i r_i^2 \quad (6)$

Айланиш ўқи қаердан ўтишиға қараб инерция моменти ҳар хил бўлиши мумкин.

Айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламаси. Жисмни Δm_i элементар қисмларға бўлиб чиқамиз. Шунда ҳар бир Δm_i га элементар айлантирувчи куч ΔF_i таъсир қилади. Ньютоннинг 2-қонуниға биноан $\Delta F_i = \Delta m_i a_i \quad (7)$, $a_i - \Delta m_i$ нинг чизиқли тезланиши. Бу тенгламанинг икки тарафини r_i га кўпайтирамиз $\Delta F_i \cdot r_i = \Delta m_i a_i \cdot r_i \quad (8)$, Δm_i элементар массанинг чизиқли тезлиги $v_i = \omega r_i$ бўлгани учун бу тезлик ўзгармас

радиусда фақат ω ўзгарганда ўзгариши мумкин: $\Delta v_i = \Delta \omega r_i \rightarrow \Delta \omega = \frac{\Delta v_i}{r_i}$ эканлигини

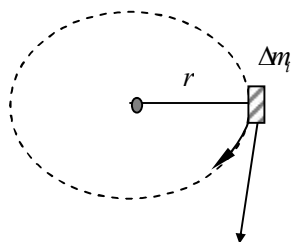
аниқлаймиз. Δm_i нинг бурчак тезланишини топамиз: $\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{1}{r_i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_i}{\Delta t} = \frac{1}{r_i} a_i \rightarrow$

$a_i = \varepsilon r_i$ (9) эканлигини аниқлаймиз. (9) ни (8) га қўйсақ қуйидаги муносабат ҳосил бўлади:

$$\Delta F_i \cdot r_i = \Delta m_i \cdot r_i^2 \varepsilon \quad (10)$$

$\Delta F_i r_i = \Delta M_i$ - айлантирувчи куч моменти. $\Delta m_i r_i^2 = \Delta J_i$ (1-расм) инерция моменти.

1-расм



Демак, $\Delta M_i = \Delta J_i \varepsilon$

ΔJ_i элементар масса Δm_i нинг инерция моменти. ΔM_i ларнинг суммаси қуйидагига тенг: $M = \sum_i \Delta M_i = \varepsilon \sum_i \Delta J_i = J \varepsilon$ (11)

$M = \sum_i \Delta M_i$ - жисмга қўйилган айлантирувчи момент, $J = \sum_i \Delta J_i$ - жисмнинг тўла инерция моменти. (11) – айланма ҳаракат динамикасининг асосий тенгламаси.

Импульс моменти ва унинг сақланиш қонуни. Моддий нуктанинг берилган О нуктага нисбатан импульс моменти деб қуйидагича ифодаланган векторга айтилади:

$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}]$ (12) бунда $\vec{r}$ санок боши ҳисобланган О нуктадан моддий нуктага ўтказилган радиус-вектор. (12) дан кўришиб турибдики, $\vec{L}$ нинг йўналиши $\vec{r}$ ва $\vec{p}$ векторларнинг вектор кўпайтмаси тарзда аниқланади, яъни парма қондаси билан аниқланади. Импульс моментининг сон қиймати: $L = rp \sin \alpha$ (13)

Моддий нукталар тизимининг бирор О нуктага нисбатан импульс моменти деб мазкур тизимдаги моддий нукталарнинг ўша О нуктага нисбатан импульс моментларининг вектор йиғиндисига айтилади:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \sum_i [\vec{r}_i, m\vec{v}_i] \quad (14)$$

бунда $\vec{r}_i$ - О нуктадан i-моддий нуктага ўтказилган радиус-вектор, $\vec{v}_i$ - i-моддий нуктанинг тезлиги.

Фараз қилайлик, массаси m ва тезлиги $\vec{v}$ бўлган моддий нуктага қандайдир $\vec{F}$ куч таъсир қилаётган бўлсин. Натижада моддий нуктанинг импульси ва ихтиёрий О нуктага нисбатан унинг импульс моменти ўзгариб боради, яъни $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$ вақтнинг функцияси:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{v}, m\vec{v}] + [\vec{r}, \vec{F}].$$

Бундан кўриш мумкин, бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи қўшилувчи ҳад иккита коллинеар векторларнинг вектор кўпайтмаси бўлганлиги сабабли нолга тенг, иккинчи қўшилувчи ҳад эса моддий нуктага таъсир этувчи ташқи кучларнинг О нуктага нисбатан моменти ($\vec{M}$) ни ифода қилади. Шунинг учун

юқоридаги тенглик қуйидагича кўринишга келади: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ (15) - импульс

моментининг вақт бўйича ўзгариши моддий нуктага таъсир этувчи ташқи кучларнинг моменти билан аниқланади (моментлар тенгламасининг Ньютоннинг иккинчи қонунига ўхшашлиги кўзга ташланади, моддий нукта импульсининг вақт бўйича ўзгариши унга таъсир этаётган барча ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисига тенг). Моддий нуктага

таъсир этувчи барча ташқи кучлар тенг таъсир этувчисининг О нуқтага нисбатан моменти нолга тенг ($\vec{M} = 0$) бўлса (15) тенглик қуйидагича ёзилади: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ (16)→

$\vec{L} = const$ (17) эканлиги келиб чиқади. Бу натижа моддий нуқта импульс моментининг сақланиш қонунини ифодалайди, моддий нуқтага таъсир этаётган кучларнинг тенг таъсир этувчисининг ихтиёрий О нуқтага нисбатан моменти нолга тенг бўлса моддий нуқта импульсининг шу нуқтага нисбатан моменти вақт ўтиши билан ўзгармайди.

Моддий нуқтанинг импульс моменти ихтиёрий О нуқтадан ўтувчи бирор ўққа нисбатан аниқланаётган бўлса (15) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$\frac{dL_z}{dt} = M_z$ (18) бунда L_z ва $M_z - \vec{L}$ ва $\vec{M}$ векторларнинг мос равишда Z ўққа туширилган проекциялари. Бирор ўққа нисбатан импульс моментининг вақт бўйича ўзгариши моддий нуқтага таъсир этувчи ташқи кучлар моментининг мазкур ўққа туширилган проекциясига тенг.

Айланма ҳаракат қилаётган жисмнинг энергияси. Берк системада жисмларнинг ҳаракат микдорлари (импульслари) моментларининг йиғиндиси (суммаси) ўзгармас микдор (илгариланма ҳаракат учун $m_1v_1 + m_2v_2 + \dots + m_nv_n = const$ бўлгани каби):

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 + \dots + J_n\omega_n = const \quad (19)$$

Айланаётган жисмнинг кинетик энергияси:

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2} \quad (20)$$

Илгариланма ва айланма ҳаракат қилаётган жисмнинг тўлиқ энергиясини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \quad (21)$$

НАЗОРАТ САВОЛЛАРИ

1. Абсолют қаттиқ жисм деб нимага айтилади?
2. Куч моменти ва инерция моменти қандай бирликларда ўлчанади?
3. Инерция моменти қандай катталиқ?
4. Куч моментининг физик мазмунини тушунтиринг?
5. Импульс моментининг йўналиши қандай аниқланади?
6. Соатнинг секунд стрелкасига қаранг. Секунд стрелкасинг импульс моменти қандай йўналган?

АДАБИЁТЛАР

1. Douglas C. Giancoli, Physics: Principles with Applications, Prentice Hall; 6 th edition January 17, 2014, USA
2. Султанов Н.А. “Физика курси” Т. “Фан ва технология” 2007 йил
3. Детлаф А.А., Яворский Б.М., Курс физики. Учебник -М.: “Академия”, 2007
4. Трофимова Т.И. Курс физики. Учебник. -М.: «Академия», 2007
5. google.com