6. VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Reja:

1.Skalyar va vektor miqdorlar.
2.Vektor tushunchasi.
3.Vektorlar ustida chiziqli amallar.
4.Ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi.
5.Vektorning o’qqa proeksiyasi va uning xossalari.
6.Vektorni koordinata o’qlaridagi tashkil etuvchilari bo’yicha yoyish.
7.Koordinatalari orqali berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar.
8.Vektorning uzunligi.
9.Fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa.
10.Fazodagi kesmani berilgan nisbatda bo’lish.

Adabiyotlar; 3,5,8,11,15,16

Tayanch iboralar; skalyar miqdor, vektor miqdor, vektor, bazis, ort, kollinearlik, komplanarlik.

2.1.Skalyar va vektor miqdorlar.

Kundalik hayotimizda: institutning eng keksa o’qituvchisining yoshi nechada?; ma‘lum quduqdan bir kecha-kunduzda qancha neft olinadi?; fakultet talabalari bir kunda qancha paxta teradi?; Bobomurod traktorchi bir kunda qancha yer haydaydi?; korxona bir kunda necha metr mato ishlab chiqardi?; xonadagi havoning harorati qanday; bir dona to’la ochilgan paxta ko’sagining massasi qancha?; ishchi bir kunda qancha g’isht terdi?; zavod bir kecha-kunduzda qancha neftni qayta ishlaydi? kabi savollarga duch kelamiz. Bu savollarning barchasiga bitta aniq son yordamida to’liq javob olish mumkin. Boshqacha aytganda bu yerda miqdor o’zining faqatgina son qiymati bilan to’la aniqlanadi. O’zining son qiymati bilan to’liq aniqlanadigan miqdorlar *skalyar* miqdorlar deyiladi.

Uzunlik, yuza, hajm va harorat skalyar miqdorga misol bo’la oladi. Shunday miqdorlar ham uchraydiki, ularni faqatgina son qiymati orqali to’liq aniqlab bo’lmaydi. Masalan: Qarshi shahridan 70km/soat tezlik bilan chiqqan avtomobil bir soatdan keyin qaerda bo’ladi? degan savolga birgina 70 km/soat yordamida javob berib bo’lmaydi. Agarda masalaning shartiga yo’nalish tayinlansa, uni hal etish mumkin. Ya‘ni Qarshi shahridan 70 km/soat tezlik bilan Qarshi-Samarqand yo’nalishi bo’yicha harakatlanayotgan avtomobil bir soatdan keyin qaerda bo’ladi? deyilsa, bu savolga to’liq javob berish mumkin.

Son qiymatidan tashqari ma‘lum yo’nalishga ega bo’lgan miqdorlar **vektor miqdorlar** deyiladi. Harakat tezligi, tezlanish, kuch, magnit va elektr maydonining kuchlanganligi kabi kattaliklar vektor miqdorga misol bo’ladi.

2.2. Vektor tushunchasi.

Vektor kattalik (miqdor) lar vektor ko’rinishida tasvirlanadi.

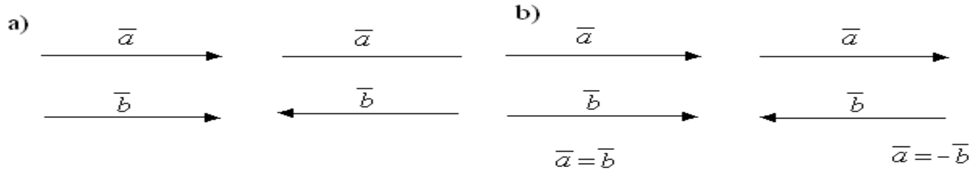
6.1-ta‘rif. Yo’nalgan kesma **vektor** deyiladi.

Boshlanish (bosh) nuqtasi A va oxirgi nuqtasi B bo’lgan vektorni $\overrightarrow{AB}$ (yoki $\overline{AB}$) kabi yozish qabul qilingan. Ba‘zan vektorni bitta harf bilan $\vec{a}$ (yoki $\bar{a}$) kabi belgilanadi. A va B nuqtalar orasidagi masofa $\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligi deyiladi.

$\overrightarrow{AB}$ vektorning uzunligini uning **moduli** ham deb yuritiladi va $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ ko’rinishda belgilanadi. Boshi oxiri bilan ustma-ust tushgan vektor **nol vektor** deb ataladi va $\vec{0}$ (yoki $\bar{0}$) bilan belgilanadi. Demak, $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ –nol vektor. Nol vektorning moduli 0 ga teng bo’lib, uning yo’nalishi aniq emas.

$\overrightarrow{BA}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor $-\vec{a}$ kabi belgilanadi. Uzunligi 1 ga teng vektor birlik vektor deyiladi va $\vec{a}$ vektorga mos (shu o'qda yotadi hamda u bilan bir xil yo'nalishga ega) birlik vektor $\vec{a}^{\,0}$ kabi belgilanadi.

6.2-ta'rif. Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar **kollinear** vektorlar deyiladi (18-chizma).



18-chizma

6.3-ta'rif. Bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar **komplanar vektorlar** deb aytiladi.

6.4-ta'rif. Kollinear $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo'nalgan hamda bir xil uzunlikka ega bo'lsa, teng deyiladi ($\vec{a}=\vec{b}$ kabi yoziladi) (18_b-chizma).

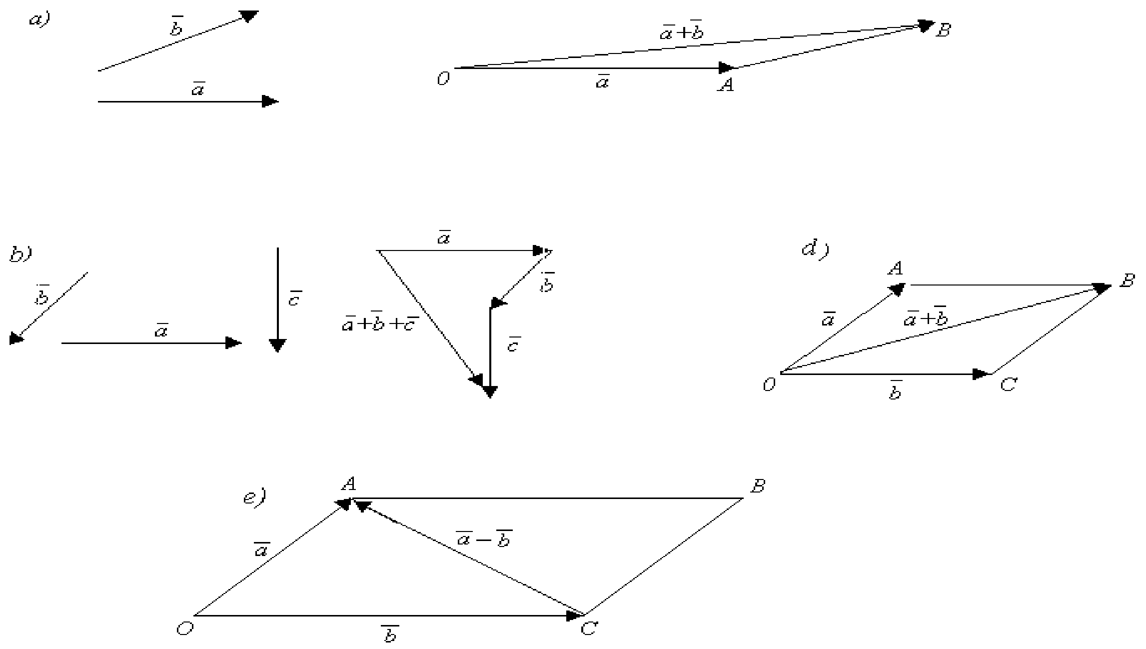
Ta'rifga binoan berilgan vektorni o'z-o'ziga parallel ko'chirish natijasida unga teng vektor hosil bo'ladi. Boshqacha aytganda vektorni uzunligi va yo'nalishini o'zgartirmagan holda uni fazoning bir nuqtasidan boshqa bir nuqtasiga ko'chirish mumkin ekan. Bunday vektorlar **erkin** vektorlar deyiladi. Biz faqatgina erkin vektorlar bilan ish ko'ramiz.

2.3. Vektorlar ustida chiziqli amallar.

Matematikada vektor tushunchasi son tushunchasiga nisbatan murakkab tushuncha. Sonlar ustida bajariladigan barcha amallarni vektorlar ustida bajarib bo'lmaydi. Masalan ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish kabi amallarni vektorlar ustida bajarish mumkin emas.

Vektorlar ustida **chiziqli amallar** deb, vektorlarni qo'shish, ayirish hamda vektorlarni songa ko'paytirish amallariga aytiladi.

1. **Vektorlarni qo'shish.** Noldan farqli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni olamiz. Ixtiyoriy 0 nuqtani olib $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ vektorni yasaymiz, so'ngra A nuqtaga $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ vektorni qo'yamiz. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a}+\vec{b}$ deb birinchi qo'shiluvchi $\vec{a}$ vektorning boshini ikkinchi qo'shiluvchi $\vec{b}$ vektorning oxiri bilan tutashtiruvchi $\overrightarrow{OB}$ vektorga aytiladi. (19^a-chizma). Vektorlarni bunday qo'shish usuli **uchburchak usuli** deyiladi.



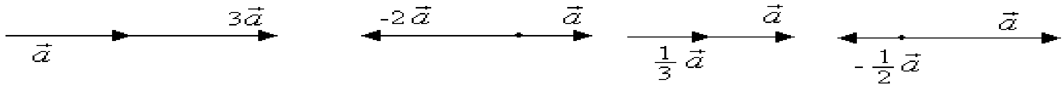
19-chizma.

Uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ deb birinchi qo'shiluvchi $\vec{a}$ vektorni oxiriga ikkinchi qo'shiluvchi $\vec{b}$ vektorni boshini qo'yib, so'ngra ikkinchi qo'shiluvchi vektorning oxiriga uchinchi $\vec{c}$ qo'shiluvchi vektorning boshini qo'yib birinchi $\vec{a}$ vektorning boshi bilan uchinchi $\vec{c}$ vektorning oxirini tutashtirish natijasida hosil bo'lgan vektorga aytiladi ($19^б$-chizma). Vektorlarni bu xilda qo'shish qo'shiluvchilar soni har qanday bo'lganda ham yaroqlidir.

Endi vektorlarni qo'shishning boshqa bir usuli bilan tanishamiz. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ va $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$ vektorlarni yig'indisini topish uchun bu vektorlarni tomon hisoblab OABC parallelogramm yasaymiz. Parallelogrammning O uchidan o'tkazilgan diagonali $\overrightarrow{OB}$ vektor, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni yig'indisini ifodalaydi. Vektorlarni bunday qo'shish usuli **parallelogramm** qoidasi deb ataladi (19^d-chizma).

2. Vektorlarni ayirish. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni ayirmasi $\vec{a}-\vec{b}$ deb $\vec{b}$ vektor bilan yig'indisi $\vec{a}$ vektorni beradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi. Demak $\vec{a}-\vec{b}$ ayirmani topish uchun $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi $-\vec{b}$ vektorni yig'indisini topish lozim ekan. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ va $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$ vektorlarni ayirmasini topish uchun bu vektorlarni tomon hisoblab, yasalgan *OABC* parallelogramning *C* uchidan o'tkazilgan diagonali $\overrightarrow{CA}$ vektorni topish lozim. Ayirma vektorda yo'nalish «ayriluvchidan» dan «kamayuvchi» ga qarab yo'naladi(19^e-chizma).

3. Vektorni songa ko'paytirish. Noldan farqli $\vec{a}$ vektorning m≠0 songa ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kollinear, uzunligi $|m|\cdot|\vec{a}|$ ga teng bo'lgan, m>0, bo'lganda $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalgan, m < 0 bo'lganda esa unga qarama–qarshi yo'nalgan hamda m$\vec{a}$ bilan belgilanadigan vektorga aytiladi(20-chizma).



20-chizma

Izoh. 1. Istalgan $\vec{a}$ vektorni uning uzunligi $|\vec{a}|$ bilan unga mos $\vec{a}^{\,0}$ birlik vektorni ko’paytmasi shaklida tasvirlash mumkin, ya‘ni $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^{\,0}$.

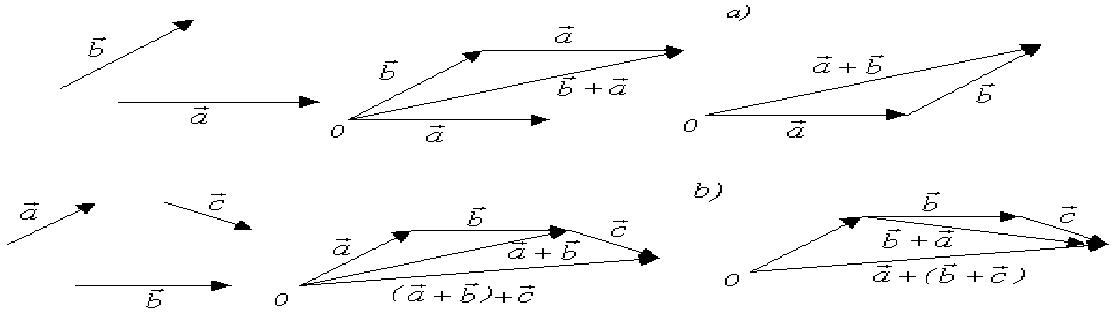
2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ($\vec{b}\neq\vec{0}$) kollinear vektorlar uchun shunday yagona λ son mavjud bo’lib $\vec{a}=\lambda\,\vec{b}$ tenglik o’rinli bo’ladi.

Haqiqatan, $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^{\,0}$, $\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\vec{b}^{\,0}$ vektorlarni kollinearligidan $\vec{a}^{\,0}=\pm\,\vec{b}^{\,0}$ ekanligi kelib chiqadi. U holda $\vec{a}=\pm\,|\vec{a}|\,\vec{b}^{\,0}=\pm\,\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\,\vec{b}$ yoki $\pm\,\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\lambda$ belgilashni kiritsak $\vec{a}=\lambda\,\vec{b}$ hosil bo’ladi.

Shunday qilib vektorlarni qo’shish, ayirish hamda vektorni songa ko’paytirish natijasida vektor hosil bo’lar ekan.

Vektorlar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga ega.

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (21^{a}-chizma);
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (21^{b}-chizma);
3. $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$.
4. $\vec{a}+0=\vec{a}$;
5. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;
6. $\vec{a}\cdot 1=\vec{a}$;
7. $(m+n)\cdot\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$, m va n haqiqiy sonlar;
8. $(m\cdot n)\cdot\vec{a}=m\cdot(n\vec{a})=n\,(m\vec{a})$.



21-chizma.

2.4. Ikki vektor orasidagi burchak tushunchasi.

Fazoda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo’lsin. Fazoda ixtiyoriy 0 nuqtani olib $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ va $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ vektorlarni yasaymiz.

5-tarif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak deb $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{OB}$ vektorlardan birini ikkinchisi bilan ustma-ust tushishi uchun burilishi lozim bo’lgan φ $(0\le\varphi\le\pi)$ burchakka aytiladi.

$\vec{a}$ vektor bilan ℓ o’q orasidagi burchak deganda $\vec{a}$ vektor bilan ℓ o’qda joylashgan va y bilan bir xil yo’nalgan $\vec{\ell}^{\,0}$ birlik vektor orasidagi burchak tushiniladi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $(\vec{a}\wedge\vec{b})$ kabi belgilanadi.

2.5. Vektorning o’qqa proeksiyasi va uning xossalari.

Fazoda ℓ o’q va $\overrightarrow{AB}$ vektor berilgan bo’lsin. A va B nuqtalardan bu o’qqa perpendikulyar tushirib perpendikulyarning asoslarini mos ravishda A_1 va B_1 orqali belgilaymiz. $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ vektorning ℓ o'qdagi **tashkil etuvchisi** yoki **komponenti** deb ataladi (22-chizma). ℓ_1 va ℓ_2 sonlar A_1 va B_1 nuqtalarning ℓ o'qdagi koordinatalari bo'lsin.

6-ta'rif. ℓ_2-ℓ_1 ayirma $\overrightarrow{AB}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi deb ataladi. $\overrightarrow{AB}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi $pr_\ell\,\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Shunday qilib $\overrightarrow{AB}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi deb vektorning boshi A va oxiri B nuqtalarning ℓ o'qdagi proeksiyalari A_1 va B_1 nuqtalar orasidagi masafoga aytilar ekan. Bu masofa vektor bilan o'qning yo'nalishi mos tushganda «+» ishora bilan aks holda «-» ishora bilan olinadi. Proeksiyani tarifidan $\overrightarrow{AB}$ vektor o'qqa perpendikulyar bo'lganda uning o'qqa proeksiyasi nolga teng bo'lishi kelib chiqadi. (22-chizma)

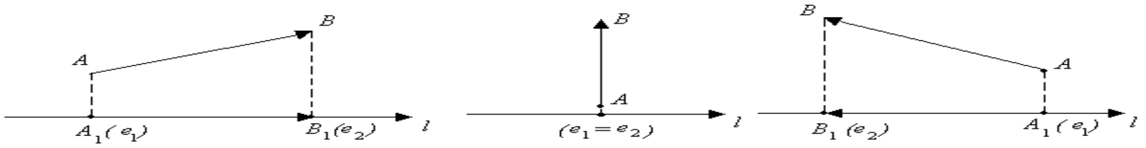
Proeksiyaning asosiy xossalarini keltiramiz:

1. $\vec{a}$ vektorning ℓ o'qqa proeksiyasi $\vec{a}$ vektor uzunligini bu vektor bilan o'q orasidagi φ burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng, yani $pr_\ell\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$. Bu 23[a]-chizmadan ko'rinib turibdi.
2. Ikki vektor yig'indisining o'qqa proeksiyasi qo'shiluvchi vektorlarning shu o'qqa proeksiyalari yig'indisiga teng, yani $pr_\ell\,(\vec{a}+\vec{b}) = pr_\ell\,\vec{a} + pr_\ell\,\vec{b}$.

Bu 23[b]-chizmadan ko'rinib turibdi.

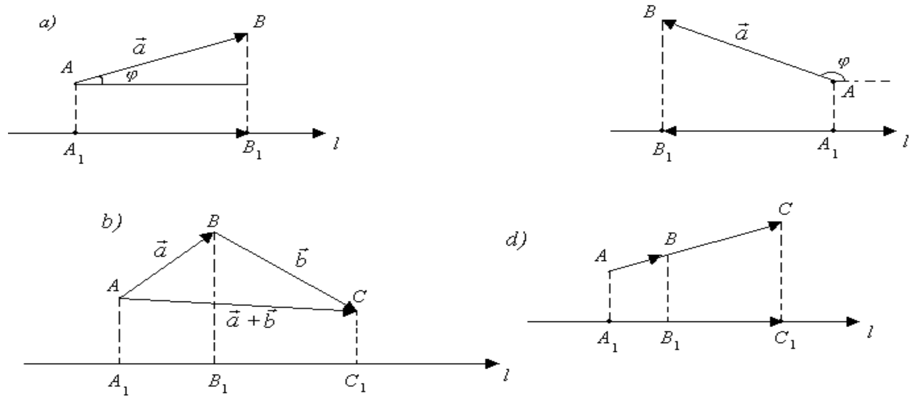
3. Vektor $\vec{a}$ ni λ songa ko'paytirganda uning o'qqa proeksiyasi ham shu songa ko'payadi, yani $pr_\ell\,(\lambda\,\vec{a}) = \lambda \cdot pr_\ell\,\vec{a}$ (23[d]-chizma).

Boshqacha aytganda skalyar ko'paytuvchini proeksiya belgisidan chiqarish mumkin ekan.



ℓ_2-ℓ_1= $pr_\ell\,\overrightarrow{AB} > 0$, ℓ_2-ℓ_1= $pr_\ell\,\overrightarrow{AB} = 0$, ℓ_2-ℓ_1= $pr_\ell\,\overrightarrow{AB} < 0$.

22-chizma.



23-chizma.

Endi $\overrightarrow{AB}$ vektorning ℓ o'qdagi tashkil etuvchi $\overrightarrow{A_1B_1}$ vektorni proeksiya orqali ifolalaymiz. $\overrightarrow{\ell^0}$ vektor ℓ o'qqa mos birlik vektor bo'lsin. U holda $\overrightarrow{A_1B_1} = pr_\ell\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\ell^0}$ (6.1) bo'lishi ravshan.

Izoh. **Vektorning boshqa vektor yo'nalishiga proeksiyasi ham xuddi vektorning o'qqa proeksiyasi kabi aniqlanadi.**

2.6. Vektorni koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari bo'yicha yoyish.

Oxyz fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini olaylik. O'qlarning har birida boshi koordinatalar boshida bo'lib yo'nalishi o'qning musbat yo'nalishi bilan ustma-ust tushadigan birlik vektorklarni olamiz va ularni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lar orqali belgilaymiz. Bu yerdagi $\vec{i}$ $0x$ o'qqa mos, $\vec{j}$ $0y$ o'qqa mos va $\vec{k}$ $0z$ o'qqa mos birlik vektorlar. Demak $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlar o'zaro perpendikulyar va nokomplanar.

7-ta'rif. Uchta $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorlar sistemasi dekartning to'g'ri burchakli bazisi yoki ortlar deb ataladi.

$\vec{a}$ fazodagi ixtiyoriy vektor bo'lsin. Shu vektorni $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlar orqali ifodalash mumkinmi? Agar mumkin bo'lsa u ifodani qanday topish mumkin? degan savollarga javob topishga harakat qilamiz.

$\vec{a}$ vektorni o'z-o'ziga parallel ko'chirib uning boshini koordinatalar boshiga joylashtiramiz. $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning oxiri M nuqtadan koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar o'tkazamiz. Natijada diagonallaridan biri $\overrightarrow{OM}$ vektordan iborat parallelepipedga ega bo'lamiz. 24-chizmadan vektorlarni qo'shish qoidasiga binoan $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1\rho} + \overrightarrow{\rho M}$ ga ega bo'lamiz. $\overrightarrow{M_1\rho} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{\rho M} = \overrightarrow{OM_3}$ bo'lgani uchun $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$ (6.2) bo'ladi. $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ va $\overrightarrow{OM_3}$ vektorlar mos ravishda $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorni $0x$, $0y$ va $0z$ o'qlardagi tashkil etuvchilari bo'lganligi uchun ular (6.1) formulaga ko'ra

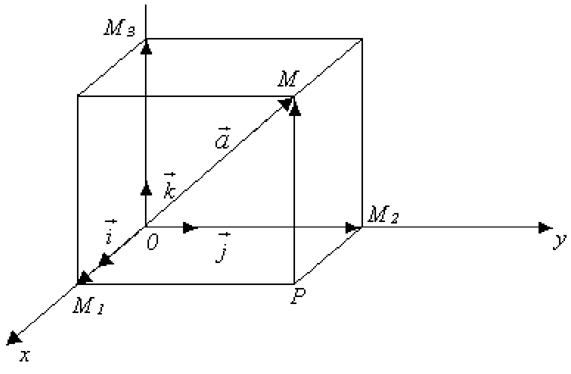
$$\overrightarrow{OM_1} = pr_{0x}\, \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{OM_2} = pr_{oy}\, \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}, \quad \overrightarrow{OM_3} = \rho r_{oz}\, \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} \quad (6.3)$$

bo'ladi.

$\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ vektorning $0x$, $0y$, $0z$ o'qlardagi proeksiyalarini mos ravishda a_x, a_y, a_z lar orqali belgilasak (6.2) va (6.3) formulalarga asoslanib

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \qquad (6.4)$$

formulaga ega bo'lamiz.



24-chizma.

Shunday qilib fazodagi istalgan $\vec{a}$ vektorni yagona usul bilan dekart bazisi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ orqali (6.4) ko'rinishda ifodalash mumkin ekan. (6.4) $\vec{a}$ vektorni uning koordinatalar o'q laridagi tashkil etuvchilari orqali yoyilmasidir. Bu yoyilmani har xil qo'llanmalarda har xil nomlar bilan yuritiladi. Masalan uni vektorni ortlar, dekart bazisi, vektorni proeksiyalari va koordinatalari orqali yoyilmasi deb ham yuritiladi.

Faraz qilaylik vektorning oxiri M nuqta x,y,z koordinatalarga ega bo'lsin. U holda $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari $a_x=x$, $a_y=y$, $a_z=z$ bo'lib (6.4) yoyilma

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \qquad (6.5)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalarini uning koordinatalari deb ham ataladi. O'qlardagi proeksiyalari a_x, a_y, a_z ga teng $\vec{a}$ vektorni $\vec{a}\,\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ yoki $\vec{a}=\{a_x;\ a_y;\ a_z\}$ ko'rinishda yozamiz.

a_x - $\vec{a}$ vektorning abssissasi, a_y - ordinatasi, a_z – applikatasi deb ataladi.

Shunday qilib boshi koordinatalarboshida bo'lgan $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ vektor bilan uni oxiri M nuqta bir xil koordinatalarga ega bo'lar ekan.

$\overrightarrow{OM}$ vektor M nuqtaning **radius-vektori** deyiladi.

Izoh: Bundan buyon vektor berilgan yoki vektor topilsin deyilganda vektorning koordinatalari berilganligini yoki vektorni koordinatalarini topish lozimligini tushuniladi.

2.7. Koordinatalari orqali berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar.

Agar vektorlarning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari (vektorning koordinatalari) malum bo'lsa, u holda bu vektorlar ustidagi qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirishi amallarini ularning proeksiyalari ustidagi arifmetik amallar bilan almashtirish mumkin.

Vektorlar $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ yoyilmalari yordamida berilgan bo'lsin. U holda $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}$, $\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}$,
ya'ni vektorlarni qo'shganda (ayirganda) ularning mos koordinatalari qo'shiladi (ayiriladi), vektorni songa ko'paytirganda uning barcha koordinatalari shu songa ko'paytiriladi.

1-misol. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ vektorlar berilgan. Ularning yig'indisi va ayirmasi topilsin.

Yechish. Vektorlarning mos koordinatalarini qo'shib

$$\vec{a}+\vec{b}=(2+3)\vec{i}+(3-1)\vec{j}+(-2+4)\vec{k}=5\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

vektorga va mos koordinatalarini ayirib $\vec{a}-\vec{b}=(2-3)\vec{i}+(3-(-1))\vec{j}+(-2-4)\vec{k}=-\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$ vektorga ega bo'lamiz.

2- misol. $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$ vektor 4 ga ko'paytirilsin.

Yechish. Vektorning har bir koordinatalarini 4 ga ko'paytirib

$4\vec{a}=8\vec{i}+20\vec{j}-12\vec{k}$ vektorni hosil qilamiz.

2.8. Vektorning uzunligi.

Fazoda vektor $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ yoyilmasi yordamida berilgan bo'lib uning uzunligi $|\vec{a}|$ ni topish talab etilsin. Qaralayotgan holda (24-chizma) $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ vektor qirralari shu vektorning koordinata o'qlaridagi tashkil etuvchilari $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ va $\overrightarrow{OM_3}$ dan iborat parallelepipedning diagonallaridan biri ekanligi aytilgan edi. To'g'ri burchakli parallelpiped diognalining kvadrati uning qirralari kvadratlarining yig'indisiga teng bo'lishi ma'lum. Shunga ko'ra

$\left|\vec{a}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|OM_1\right|^2 + \left|OM_2\right|^2 + \left|OM_3\right|^2$, yoki

$\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = \left|a_x\right|$, $\left|\overrightarrow{OM_2}\right| = \left|a_y\right|$ va $\left|\overrightarrow{OM_3}\right| = \left|a_z\right|$ bo'lgani uchun $\left|\vec{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$,bundan vektorni o'zunligini topish formulasi

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (6.6)$$

ni hosil qilamiz.

3-misol. $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ vektorni uzunligi topilsin?

Yechish. Misolda $a_x=6$, $a_y=3$, $a_z=-2$ bo'lgani uchun (6.6) formulaga binoan $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+9+4} = 7$ bo'ladi.

Izoh. $\vec{a}$ vektor $0xy$ tekislikda qaralsa bu holda vektorning applikatasi nolga teng bo'lganligi sababli vektor $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ yoyilmaga ega hamda uning uzunligi $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ kabi topiladi. $\vec{i}$, $\vec{j}$ birlik vektorlari tekislikda Dekart bazisini tashkil etadi. a_x – abssissaga va a_y - ordinataga ega bo'lgan $\vec{a}$ vektorni $\vec{a}\{a_x, a_y\}$ yoki $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$ kabi yoziladi.

Endi vektorlar nazariyasidan foydalanib analitik geometriyaning ba'zi masalalarini yechamiz.

2.9.Fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa.

Boshi A $(x_1; y_1; z_1)$, *oxiri* B $(x_2; y_2; z_2)$ *nuqtalarda bo'lgan* $\overrightarrow{AB}$ *vektorni qaraymiz. Vektorning o'qqa proeksiyasining ta'rifiga ko'ra* $\rho r_{0x}\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1$, $\rho r_{0y}\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1$, $\rho r_{0z}\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$ *bo'lganligi sababli (6.4) ga binoan*

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \qquad (6.7)$$

formulaga ega bo'lamiz. Demak boshi A $(x_1; y_1; z_1)$ nuqtada, oxiri $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektorni koordinatalarini topish uchun uning oxirining koordinatalaridan boshini mos koordinatalarini ayirish lozim ekan. (6.6) formulaga binoan vektorning uzunligi

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (6.8)$$

formula yordamida topiladi.

Ana shu formula A va B nuqtalar orasidagi masofani aniqlaydi.

4-misol. A (4; 3; 2) va B(1; -1;2) nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

Yechish. Misolda $x_1=4$, $y_1=3$, $z_1=2$ $x_2=1$, $y_2=-1$, $z_2=2$ (6.8) formulaga ko'ra $d = AB = \sqrt{(1-4)^2 + (-1-3)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ bo'ladi.

2.10. Fazodagi kesmani berilgan nisbatda bo'lish.

Fazoda A $(x_1; y_1; z_1)$ va B $(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. AB kesmani $\lambda>0$ nisbatda bo'luvchi $M(x,y,z)$ nuqtani topish talab etilsin, ya'ni AB kesmada $AM:MB=\lambda$ munosabatni qanoatlantiruvchi M nuqtani topish talab etilsin. Bu holda $\overrightarrow{AM}$ va $\overrightarrow{MB}$ vektorlar kollinear bo'lib $AM:MB=\lambda$ yoki $AM=\lambda MB$ bo'lgani uchun $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ bo'ladi. (6.7) formulaga binoan $\overrightarrow{AM} = (x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j} + (z-z_1)\vec{k}$, $\overrightarrow{MB} = (x_2-x)\vec{i} + (y_2-y)\vec{j} + (z_2-z)\vec{k}$, bo'lgani uchun, hamda vektorni songa ko'paytirganda uning barcha koordinatalari shu songa ko'payishini hisobga olib $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$ tenglikni

$$(x-x_1)\vec{i} + (y-y_1)\vec{j} + (z-z_1)\vec{k} = \lambda(x_2-x)\vec{i} + \lambda(y_2-y)\vec{j} + \lambda(z_2-z)\,\vec{k}$$

ko'rinishida yozamiz. Bundan teng vektorlarni mos koordinatalari ham teng bo'lishni hisobga olib $x-x_1=\lambda(x_2-x)$, $y-y_1=\lambda(y_2-y)$, $z-z_1=\lambda(z_2-z)$ tengliklarni hosil qilamiz.

$x-x_1=\lambda(x_2-x)$ chiziqli tenglamani yechib x ni topamiz. $x-x_1=\lambda x_2-\lambda x$, $x+\lambda x=x_1+\lambda x_2$, $(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2$, $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$.

Shuningdek $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ formulalarga ega bo'lamiz.

Shunday qilib AB kesmani $\lambda>0$ nisbatda bo'luvchi M nuqtaning koordinatalari $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ (6.9) formulalar yordamida topilar ekan.

Xususiy holda AB kesmaning o'rtasini topish talab etilganda $\lambda=1$ bo'lib (6.9) dan AB kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqtaning koordinatalarini topish uchun $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$ (6.10)
formulalarni hosil qilamiz.

5-misol. $A=(5;7;8)$ va $B=(8;4;5)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani 2:1 nisbatda bo'luvchi ya'ni B nuqtaga qaraganda A nuqtadan 2 barobar o'zoqlikda joylashgan M nuqta topilsin.

Yechish. Misolda $x_1=5$, $y_1=7$, $z_1=8$, $x_2=8$, $y_2=4$, $z_2=5$, $\lambda=2$ bo'lgani uchun (6.9) ga binoan

$x=\dfrac{5+2\cdot 8}{1+2}=\dfrac{21}{3}=7$, $y=\dfrac{7+2\cdot 4}{3}=\dfrac{15}{3}=5$, $z=\dfrac{8+2\cdot 5}{3}=\dfrac{18}{3}=6$ bo'ladi. Izlanayotgan nuqta M (7; 5; 6;) nuqta bo'lar ekan.

6-misol. AB kesma C nuqta yordamida 2,5 nisbatda bo'linadi.
$A=(3;7;4)$ va $C=(8;2;3)$ nuqtalar ma'lum bo'lsa B nuqtani toping ?

Yechish. Misolda $x_1=3$, $y_1=7$, $z_1=4$, $x=8$, $y=2$, $z=3$ bo'lib x_2, y_2 va z_2 larni topish talab etiladi. (6.9) ga tegishli qiymatlarni quyib noma'lumlarni aniqlaymiz:

$8=\dfrac{3+2{,}5\cdot x_2}{1+2{,}5}$, $8\cdot 3{,}5=3+2{,}5x_2$, $x_2=\dfrac{8\cdot 3{,}5-3}{2{,}5}=10$, $2=\dfrac{7+2{,}5\cdot y_2}{3{,}5}$, $7=7+2{,}5\cdot y_2$, $y_2=0$,

$3=\dfrac{4+2{,}5\cdot z_2}{3{,}5}$, $z_2=\dfrac{3\cdot 3{,}5-4}{2{,}5}=2{,}6$.

Shunday qilib kesmaning uchi B(10; 0; 2,6) nuqta bo'lar ekan.

7-misol. $A(3;9;-7)$ va $B(-5;3;-1)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani o'rtasi C nuqta topilsin.

Yechish. C nuqtaning koordinatalarini x, y, z orqali belgilasak ular (6.10) formulalar yordamida aniqlanadi. $x=\dfrac{3-5}{2}=-1$, $y=\dfrac{9+3}{2}=6$, $z=\dfrac{-7-1}{2}=-4$.

Demak C(-1;6;4) nuqta AB kesmani o'rtasi ekan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1.Skalyar va vektor kattaliklar nima?

2. Vektor nima?
3. Qanday vektorlar kollinear, komplanar, teng va qarama-qarshi deb ataladi?
4. Vektorning moduli nima?
5. Vektorlar ustidagi qaysi amallar chiziqli amallar deb ataladi va ular qanday amalga oshiriladi?
6. Vektorning o'qqa proeksiyasi nima va u qanday xossalarga ega?
7. Vektorning o'qdagi tashkil etuvchisi nima?
8. Dekart bazasi (ort) nima?
9. Nuqtaning radius-vektori nima?
10. Vektorning koordinatalari nima?
11. Vektor ortlar orqali qanday ifodalanadi?
12. Koordinatalari yordamida berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar qanday bajariladi?
13. Vektorning uzunligi qanday topiladi?
14. Fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa qaanday topiladi?
15. Fazoda kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi nuqta qanday topiladi?

§3. Vektorlarning vektor va aralash ko'paytmasi.

Reja:

1. Ikki vektorni vektor ko'paytmasi.
2. Vektor ko'paytmaning xossalari.
3. Vektor ko'paytmani topish.
4. Uch vektorni aralash ko'paytmasi.
5. Aralash ko'paytmani geometrik ma'nosi
6. Uch vektorning komplanarlik sharti.

Adabiyotlar: 3,5,8,9,12,16.

Tayanch iboralar: vektor ko'paytma, aralash ko'paytma, komplanarlik.

3.1.Ikki vektorning vektorli ko'paytmasi.

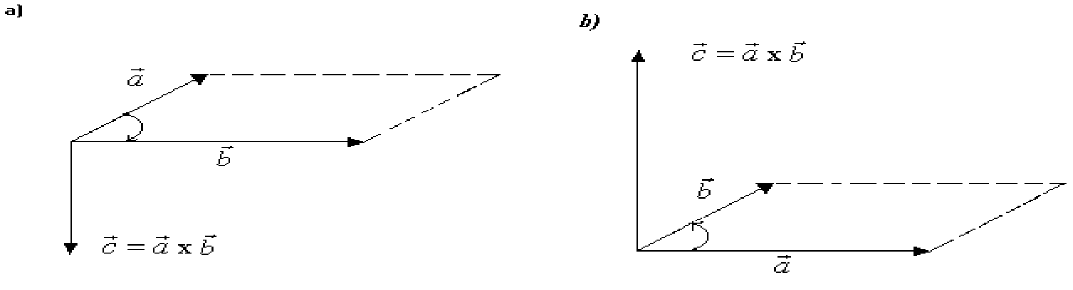
1-ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga **vektor ko'paytmasi** deb quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan $\vec{c}$ vektoga aytiladi:

a) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ko'paytuvchi vektorlarning har ikkalasiga perpendikulyar;

b) $\vec{c}$ vektorning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilish masofasi soat mili aylanishiga teskari yo'nalishda ko'rinadi;

d) $\vec{c}$ vektorning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogramning yuziga teng, ya'ni $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$ (8.1)

$\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kabi belgilanadi(26-chizma).



26-chizma.

3.2. Vektor ko'paytmaning xossalari.

1.Ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashtirish natijasida vektorli ko'paytmaning ishorasi o'zgaradi, ya'ni $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$. Bu xossaning to'g'riligi vektor ko'paytmaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

2. Sonli ko'paytuvchini vektor ko'paytma belgidan chiqarish mumkin, ya'ni $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$, ($\lambda$ =const).

3. Vektor ko'paytma qo'shishga nisbatan taqsimot xossasiga ega, ya'ni

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c},\quad (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$$

4. Vektor ko'paytma ko'paytuvchi vektorlardan biri nol vektor bo'lganda yoki vektorlar kollinear bo'lgandagina nolga teng bo'ladi.

Bu xossadan istalgan vektorni o'zini-o'ziga vektor ko'paytmasi nol vektorga tengligi, ya'ni $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ ekani kelib chiqadi. Jumladan dekart bazisi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ uchun $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$ ga ega bo'lamiz.

1-misol $(3\vec{a}-2\vec{b})\times(4\vec{a}+3\vec{b})$ topilsin.

Yechish $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$ ekanini hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz.

$(3\vec{a}-2\vec{b})\times(4\vec{a}+3\vec{b})=12(\vec{a}\times\vec{a})+9(\vec{a}\times\vec{b})-8(\vec{b}\times\vec{a})-6(\vec{b}\times\vec{b})=12\cdot0+9(\vec{a}\times\vec{b})+\ +8(\vec{a}\times\vec{b})-6\cdot0=17(\vec{a}\times\vec{b})$.

2-misol. $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$ tenglik isbotlanib, uning geometrik ma'nosi izohlansin.

Yechish.$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{b}=0+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{b}-0=2(\vec{a}\times\vec{b})$.

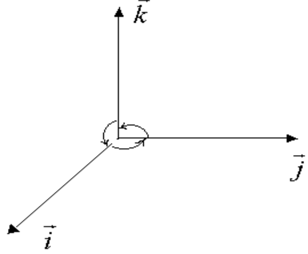
$\vec{a}-\vec{b}$ va $\vec{a}+\vec{b}$ tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ bo'lgan parallelogramning diagonallarini ifodalaydi. $|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})|$ ifoda tomonlari berilgan parallelogramning diagonallaridan iborat parallelogramning yuzini, $|\vec{a}\times\vec{b}|$ esa tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat parallelogramning yuzini ifodalaydi.

Shunday qilib isbotlangan tenglik, tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektordan iborat parallelogram yuzini ikkilangani tomonlari shu parallelogramning dioganallaridan iborat parallelogrammning yuziga tengligini bildiradi.

3.3. Vektor ko'paytmani topish.

$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ va $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ vektorlar berilgan bo'lsin. Shu vektorlarning vektor ko'paytmasini ularning koordinatalaridan foydalanib, topiladigan formula chiqaramiz.

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vektorni vektor ko'paytmalarini hisoblaymiz. $\vec{i}\times\vec{j}$ vektor ko'paytmani qaraymiz. Bu ko'paytmaning moduli $|\vec{i}\times\vec{j}|=|\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=1\cdot1\cdot1=1$



27-chizma.

$\vec{i}\times\vec{j}$ vektor $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorning har biriga perpendikulyar bo'lgani uchun u 0z o'qda joylashgan va u bilan bir hil yo'nalgan.

Chunki uning uchidan qaragandan $\vec{i}$ dan $\vec{j}$ qisqa burilish masofasi soat mili aylanishi yo'nalishiga tesqari ko'rinadi.

Demak, $\vec{i}\times\vec{j}$ vektor $\vec{k}$ vektorning o'ziga teng ekan, ya'ni $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$. Shuningdek $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$ tengliklarga ega bo'lamiz. Ushbu tengliklardan hamda $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$ dan va vektor ko'paytmaning xossalaridan foydalanib quyidagiga ega bo'lamiz.

$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})=a_xb_x\cdot 0+a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_y\cdot 0+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i}+a_zb_z\cdot 0=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-{}_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}=$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Demak $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasini

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (8.2)$$

formula yordamida topilar ekan. Jumladan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat paralellogrammning yuzi

$$S_n=|\vec{a}\times\vec{b}|=\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix}\right\| \qquad (8.3)$$

formula yordamida va shu vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi esa

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{matrix}\right\| \qquad (8.4)$$

formula yordamida topiladi.

3-misol. $\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{k}$ va $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi topilsin.

Yechish. (8.2) formulaga asosan:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-3\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}.$$

4-misol. Tomonlari $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ vektorlardan iborat parallelogrammning yuzi topilsin.

Yechish (8.2) formulaga binoan:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=(-9+1)\vec{i}-(3-2)\vec{j}+(-1+6)\vec{k}. \qquad |\vec{a}\times\vec{b}|=$$

$$\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{90}=3\cdot\sqrt{10}$$

(8.3) ga asosan $S_n=3\cdot\sqrt{10}$ kv. birlik bo'ladi.

5-misol: Uchlari $A(3;\ 4;-1)$, $B(2;\ 0;\ 3)$ ва $C(-3;\ 5;\ 4)$ nuqtalarga bo'lgan uchburchakning yuzi topilsin.

Yechish: $\overrightarrow{AB}=\{2-3;\ 0-4;\ 3+1\}=\{-1;\ -4;\ 4\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-3-3;\ 5-4;\ 4+1\}=\{-6;\ 1;\ 5\}$.
(8.2) formulaga ko'ra:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}(-20-4)-\vec{j}(-5+24)+\vec{k}(-1-24)= \quad =-24\vec{i}$$

$+19\vec{j}-25\vec{k}$.

$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-24)^2+19^2+25^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1562}$. Demak, $S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{1562}$ kv. birlik

6-misol. Uchlari $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(3;\ 4;\ 5)$ va $C(2;\ 4;\ 7)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning A burchagini sinusi topilsin.

Yechish: $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin A$ tenglikdan

$$\sin A=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} \qquad (8.5)$$

formulaga ega bo'lamiz.
$\overrightarrow{AB}=\{3-1;\ 4-2;\ 5-3\}=\{2;\ 2;\ 2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2-1;\ 4-2;\ 7-3\}=\{1;\ 2;\ 4\}$,
$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$,

$$\overrightarrow{AB}\ \text{x}\ \overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}, \qquad \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}$$

$=\sqrt{56}$.

tengliklarga egamiz (8.5) formulaga ko'ra $\sin A=\frac{\sqrt{56}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{4\cdot2\cdot7}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3\cdot7}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ bo'ladi.

$BC^2 < AB^2 + AC^2$ bo'lganda A burchak o'tkir, $BC^2 > AB^2 + AC^2$ bo'lganda u o'tmas burchak bo'ladi.

3.4. Uch vektorning aralash ko'paytmasi.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

2-ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi $\vec{a}\times\vec{b}$ ni uchinchi $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan son $\vec{a},\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi deyiladi. Vektorlar $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_a\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_a\vec{i}+c_b\vec{j}+c_z\vec{k}$

yoyilmalari yordamida berilganda ularning aralash ko'paytmasi $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ ni topish uchun formula chiqaramiz.

$$(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

vektorni skalyar ko'paytmani topish formulasi (7.9) ga asoslanib $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ vektorga skalyar ko'paytiramiz . U holda

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot c_z$$

kelib chiqadi. Bu tenglikning o'ng tomonidagi ifoda

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

determinantning uchinchi satr elementlari bo'yicha yoyilmasi ekanini ko'rish qiyin emas. Demak

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (8.6)$$

Shunday qilib, uch vektorning aralash ko'paytmasi uchinchi tartibli determinantga teng bo'lib uning birinchi satrini birinchi ko'paytuvchi vektorning koordinatalari, ikkinchi va uchinchi satrlarini ikkinchi va uchinchi ko'paytuvchi vektorlarning koordinatalari tashkil etadi.

7-misol. $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ va $\vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi topilsin .

Yechish. (8.6) formulaga asosan:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3(25+3)-4(15+2)+2(9-10)=14.$$

3.5.Aralash ko'paytmaning geometrik manosi .

Boshlari bitta nuqtada bo'lgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nokomplanar vektorlarni qaraymiz. Bu vektorlarni qirra deb parallelepiped yasaymiz. Uzinligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga yasalgan parallelogramning yuzi Q ga teng bo'lgan $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ vektorni yasaymiz. Skalyar ko'paytmani tarifiga binoan:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\left(\vec{d}\wedge\vec{c}\right)=Q\left|\vec{c}\right|\cdot\cos\left(\vec{d}\wedge\vec{c}\right).$$

$\left(\vec{d}\wedge\vec{c}\right)<\frac{\pi}{2}$ deb faraz qilamiz. U holda parollelepipedning balandligini h orqali belgilasak $h=|\vec{c}|\cdot\cos\left(\vec{d}\wedge\vec{c}\right)$ kelib chiqadi. Shunday qilib aralash ko'paytma $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=Q\cdot h$ bo'ladi.

Parallelepipedning hajmini V deb belgilasak u asosining yuzi Q bilan balandligi h ning ko'paytmasiga teng, ya'ni $V=Q\cdot h$ bo'ladi.

Shunday qilib bu holda uch vektorning aralash ko'paytmasi qirralari shu vektordan iborat parallelepipedning hajmiga teng, ya'ni ($\vec{a}\times\vec{b}$)$\cdot\vec{c}=V$ bo'lar ekan.

Agar $\left(\vec{d}\wedge\vec{c}\right)>\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, cos$\left(\vec{d}\wedge\vec{c}\right)<0$, $\left|\vec{c}\right|$ cos$\left(\vec{d}\wedge\vec{c}\right)=-h$ bo'lib ($\vec{a}\times\vec{b}$)$\cdot\vec{c}=-V$ bo'ladi.

Har ikkala holni birlashtirib ($\vec{a}\times\vec{b}$)$\cdot\vec{c}=\pm V$ yoki $V=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$

formulaga ega bo'lamiz.

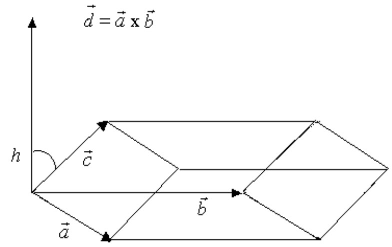
Shunday qilib, uch vektorni aralash ko'paytmasini absolyut qiymati shu vektorlarni qirra deb ularga yasalgan parllelepipedning hajmiga teng ekan.

Bu aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosidir.

Demak qirralari $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan iborat parallelepipedning hajmi

$$v_{par}=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| \qquad (8.7)$$

formula yordamida topiladi.



28-chizma.

Endi qirralari $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlardan iborat uchburchakli piramidaning hajmini topamiz.

Bu holda piramidaning hajmi qirralari, xuddi shunday parallelepipedning hajmining oltidan biriga teng ekani elemintar giometriyadan malum.

Shunday qilib

$$V_{pir}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| \qquad (8.8)$$

piramidani hajmini topish formulasini hosil qilamiz.

8-misol. Uchlari $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(3;4;-1)$, $C(2;3;5)$, $D(6;0;-3)$ nuqtalarida bo'lgan uchburchakli piramidaning hajmi topilsin.

Yechish: Qaralayotgan hol uchun (8.8) formula

$V_{pir}=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|$ ko'rinishiga ega. $\overrightarrow{AB}=\{3;4;-1\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2;3;5\}$, $\overrightarrow{AD}=\{6;0;-3\}$

bo'lgani uchun

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}=$$

$=3\cdot(-9)-4(-6-30)+18=135$ va $V=\frac{1}{6}\left|135\right|=22{,}5$ kelib chiqadi.

3.6.Uch vektorning komplanarlik sharti.

Uchta komplanar noldan farqli $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlarni qaraymiz. Soddalik uchun bu vektorlar bir tekistlikda yotadi deb faraz qilamiz. Bu vektorlarni aralash ko'paytmasi ($\vec{a}\times\vec{b}$)$\cdot\vec{c}$ ni tuzamiz. $\vec{a}\times\vec{b}$ vektor ko'paytma $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning har biriga perpendikulyar bo'lgani uchun u ular yotgan tekistlikka ham, jumladan $\vec{c}$ vektorga ham perpendikulyar bo'ladi. Perpendikulyar vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga tengligidan ($\vec{a}\times\vec{b}$)$\cdot\vec{c}=0$ kelib chiqadi.

Demak komplanar vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng ekan. Tesqarisi ham urinli, yani aralash ko'paytmasi nolga teng vektorlar komplanar bo'ladi.

Haqiqatan, vektorlar nokomplanar bo'lsa vektorlarni qirra deb parallelepiped yasash mumkin bo'lib uning hajmi $V \neq 0$ bo'ladi. Ammo $V=\left|\left(\vec a \times \vec b\right)\cdot \vec c\right|$ bo'lgani uchun $(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c \neq 0$ bo'ladi. Bu shartga zid.

Shunday qilib uchta $\vec a, \vec b, \vec c$ (noldan farqli) vektorlarning komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir .

$$(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c = 0 \quad \text{yoki} \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.9)$$

uch vektorning komplanarlik shartidir .

9-misol. $\vec a=\{3;4;5\}$, $\vec b\ \{1;2;2\}$, $\vec c=\{9;14;16\}$ vektorning komplanarligi ko'rsatilsin .

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 14 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 4\cdot(-2) + 5\cdot(-4) = 0.$$

Komplanarlik sharti (8.9) bajarilganligi uchun vektorlar komplanar.

10-misol. $A(1;0;1)$, $B(4;4;6)$, $C(2;2;3)$ va $D(10;14;17)$ nuqtalar bitta tekistlikda yotadimi?

Yechish. $\overrightarrow{AB}=\{4-1;\ 4-0;\ 6-1\}=\{3;4;5\}$, $\overrightarrow{AC}=\{2-1;\ 2-0;\ 3-1\}=\{1;2;2\}$, $\overrightarrow{AD}=\{10-1;\ 14-0;\ 17-1\}=\{9;\ 14;\ 16\}$ vektorni qaraymiz. Ularning aralash ko'paytmasini hisoblaymiz:

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 14 & 16 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 16 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 14 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 4(-2) - 5\cdot 4 = 0.$$

Vektorlarning aralash ko'paytmasi nolga teng, ular komplanar va *A*,*B*,*C*,*D* nuqtalar bir tekistlikta yotadi.

Izoh. 1. Biz kerakli formulalarni faqatgina fazodagi vektorlar uchun chiqardik. Ammo keltirilgan formulalar tekistlikdagi vektorlar uchun ham yaroqli . Formulalardagi vektorlarning uchinchi koordinata (applikata)lari nol deb olinsa formulalar tekistlikdagi vektorlar uchun o'rinli bo'ladi. Masalan tekistlikda vektorlar $\vec a = a_x\vec i + a_y\vec j$, $\overrightarrow{b_x} = b_x\vec i + b_y\vec j$ ($\vec i, \vec j$ -dekart bazisi) kabi yoyilmaga ega bo'lsa ularning vector ko'paytmasi $\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot \vec k$ bo'ladi.

2. Biz erkin vektorlar bilan ish ko'rganimiz uchun ko'p hollarda qaralayotgan vektorlarning boshi bir nuqtada deb faraz qildik.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi nima?
2. Vektor ko'paytma qanaqa xossaga ega?

3.Vektor ko’paytmani geometrik ma‘nosi nima?
4. Vektor ko’paytma qanday topiladi?
5. Parallelogramm va uchburchakni yuzini topish formulasini yozing ?
6. Uch vektorni aralash ko’paytmasi deb nimaga aytiladi?
7. Aralash ko’paytmaning geometrik ma‘nosi nima?
8. Aralash ko’paytma qanday topiladi?
9. Aralash ko’paytma yordamida parallelopiped va piramidaning hajmini topish formulasini yoziing?
10. Uch vektoring komplanarlik sharti nimadan iborat?
11. To’rtta nuqtaning bir tekislikda yotish yoki yotmasligi qanday tekshiriladi?