Mavzu-15. Funksiyani to'la tekshirish.Funksiyani monotonligi, funksiya ekstremumi, ekstremumi bo'lishining zaruriy yetarli sharti. Kesmada uzluksiz funksiyalarning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish. Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi va burilish nuqtalari. Funksiya grafigining assimptotalari. Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi. Differensial hisobning amaliy masalalarda qo'llanilishi.

Reja:

1. Monoton funksiyalar.
2. Funksiya ekstremumi.
3. Ekstremumi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti.
4. Funksiyalarning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.
5. Funksiya grafigi qavariqligi va buralishi.
6. Funksiya grafigining burilish nuqtalari.
7. Funksiya assimptotalari.
8. Funksiyani tekshirish.
9. Differensial hisobning amaliy masalalarda qo'llanilishi.

Monoton funksiya - o'suvchi yoki kamayuvchi funksiyalardir. Berilgan funksiya biror oraliqda monoton bo'lishi uchun uning orttirmasi

Af(x)=f(x+Ax)-f(x), Dx>0, oraliqda ishorasini o'zgartirmasligi lozim.

Agar Ax>0 bo'lganda D(x) noldan qat'iy katta yoki qat'iy kichik bo'lsa, u holda f(x) qat'iy monoton funksiya deyiladi. Biror oralikdd differensiyalanuvchi funksiya shu oralikda monoton bo'lishi uchun uning hosilasi o'zgarmas ishorani saqlashi zarur va yetarlidir

Agar argumentning x_1 qiymatiga yetarlicha yaqin ixtiyoriy x qiymatlar uchun $f(x_1) > f(x)$ tengsizlik bajarilsa $(x = x_1 + \Delta x, |\Delta x|)$ yetarlicha kichik son , x_1 nuqta funksiyaning maksimum nuqtasi deyiladi ;aksincha esa minimum nuqtasi deyiladi.

Funksiyaning maksimum va minumumlari uning **ekstremumlari** yoki ekstremal qiymatlari deyiladi. (Extremal lotincha chetki degan ma'noni bildiradi).

<u>Teorema-1</u>: (Ferma teoremasi) . Differensiallanuvchi funksiyaning ekstrimum nuqtasidagi hosilasi nolga teng: $f'(x_0) = 0$

Funksiyaning hosilasi nolga teng bo'ladigan nuqtalar statsionar nuqtalar deyiladi. Funksiyaning hosilasi nolga teng yoki mavjud bo'lmagan nuqtalar uning **kritik nuqtalari** deyiladi.

1- eslatma. $f'(x_0) = 0$ shartning bajarilishi x_0 nuqta f(x) funksiyaning ekstrimum nuqtasi bo'lishi uchun yetarli emas.

Misol. $f(x)=x^3$ funksiya uchun $f'(x)=3x^2$, $f'(0)=0$ lekin $x_0=0$ nuqta minimum nuqtasi ham, maksimum nuqtasi ham bo'la olmaydi, chunki x<0 da $f(x)<0, x>0 da f(x)>0,$ demak, x_0 nuqtaning $f(x)<f(x_0) yoki f(x)>f(x_0)$ tengsizliklardan biri bajariladigan atrofi mavjud emas.

2-eslatma. Funksiya o'zining hosilasi mavjud bo'lmagan yoki cheksizlikka intiladigan nuqtalarda ekstrimumga ega bo'lishi mumkin.

Misollar. 1. $f(x)=|x-2|$ funksiya x=2 nuqtada hosilaga ega emas

Lekin x=2 nuqtada funksiya minumumga ega chunki bu nuqtaning har qanday atrofida f(2)<f(x) tengsilik bajariladi.

$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ funksiya x=0 nuqtada chekli hosilaga ega emas, chunki $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ funksiya x=0 da cheksizlikka intiladi. Ammo x=0 nuqtada funksiya minumga ega.

$$f(0)=0 va x\neq 0 da f(x)>f(0)$$

Ekstrimum mavjudligining yetarlilik sharti masalasini funkiyaning birinchi yoki ikkinchi tartibli hosiladan foydalanib hal qilish mumkin.

Agar x_0 nuqtaga yetarlicha yaqin bo'lgan x_1 va x_2 nuqtalarda $(x_1<x_0<x_2), f(x_1)\cdot f(x_2)<0$ tengsizlik bajarilsa, $x=x_0$ nuqtadan o'tishda funksiya o'z ishorasini o'zgartiradi, deymiz. Agar $f(x_1)<0, f(x_2)>0$ bo'lsa, funksiya o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi, deymiz.

Teorema-2. Agar x=x $_0$ nuqtada f(x) funksiyaning hosilasi nolga teng bo'lib, x_0 nuqtadan o'tishda o'z ishorasini o'zgartirsa , x_0 ekstremum nuqtasi bo'ladi.

1) Agar bunda hosilaning ishorasi musbatdan manfiyga o'zgarsa , x_0 maksimum nuqtasi bo'ladi.

2) Agar bunda hosilaning ishorasi manfiydan musbatga o'zgarsa , x_0 minimum nuqtasi bo'ladi.

Misol. $f(x)=x^3-3x$ funksiyaning ekstrimumlarini toping.

Yechish. $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ hosilasi $x_1=1, x_2=1$ nuqtalarda nolga teng bo'ladi.x<-1 va $f'(x)>0$ va x>1 da $f'(x)>0$ bo'lgani uchun $x_2=1$ minimum nuqtasi bo'ladi.

$f_{\min}=f(1)=1^3-3\cdot 1=-2; f_{\max}=f(-1)=-1+3=2$

Ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning birinchi tartibli $f'(x)$ hosilasi differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, undan olingan hosilani funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va bunday belgilanadi.

$y''=(f'(x))'$

Teorema-3. Agar $x = x_0$ nuqtada $f(x)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasi nolga teng bo'lib, ikkinchi tartibli hosilasi noldan farqli bo'lsa,u holda :

1) agar $f''(x_0) < 0$ bo'lsa , $x_0 -$ maksimum nuqtasi;

2) agar $f''(x_0) > 0$ bo'lsa , $x_0 -$ minimum nuqtasi;

Misol. $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 18x + 8$ funksiya ekstrimumlarini toping.

Yechish: $f'(x) = 3x^2 - 3x - 18 = 3(x^2 - x - 6) = 3(x+2)\cdot(x-3)$ hosila $x_1 = -2, x_2 = 3$ nuqtalarda nolga teng bo'ladi. $f''(x) = 6x - 3, f''(-2) = 6(-2) - 3 = -15 < 0,$

$f''(3) = 6 \cdot 3 - 3 = 15 > 0.$ Demak, $x_1 = 2$ nuqtada funksiya maksimumga , $x_2 = 3$ nuqtada esa minumumga ega bo'ladi.

$f_{max} = f(-2) = 30; f_{min} = f(3) = -32{,}5$

Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.

Kesmaning ichki nuqtalarida differensiallanuvchi va kesma chegaralarida uzluksiz bo'lgan funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish quydagicha bajariladi:

1. Funksiya hosilasini nolga tenglashtirib, kesmaning ichki sohasiga tegishli bo'lgan kiritik nuqtalar topiladi.

2. Funksiyaning kesmaning chegaraviy nuqtalaridagi qiymatlari va kesma ichiga tegishli bo'lgan kiritik nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi.

3. Funksiyaning topilgan qiymatlari o'zaro taqqoslanib , ulardan eng kichik va eng kattasi aniqlanadi.

Teorema-4(Veyershtrass) $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzliksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya shu kesmada o'zining eng kichik va eng katta qiymatini qabul qiladi.

Misol. 1) 50 sonini kublarining yig'indisi eng kichik bo'ladigan ikki sonning yig'indisi shaklida yozing.

Yechish.

$x + y = 50$

$f(x) = x^3 + (50 - x)^3; f'(x) = 300x - 7500; f'(x) = 0, x = 25, y = 25.$ Javob:(25;25)

2) 625sonini shunday ikkita musbat sonning ko'paytmasi ko'rinishida yozingki, bu sonlar kvadratlarining yig'indisi eng kichik bo'lsin.

Yechish: xy=625 , $f(x) = x^2 + \left(\frac{625}{x}\right)^2, f'(x) = 0 \rightarrow x = y = 25$

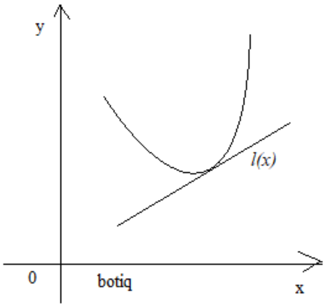
3)Yuzi $9\,sm^2$ ga teng bo'lgan barcha to'gri to'rtburchaklar orasida perimetri eng kichik bo'ladigan to'g'ri to'rtburchakni toping.

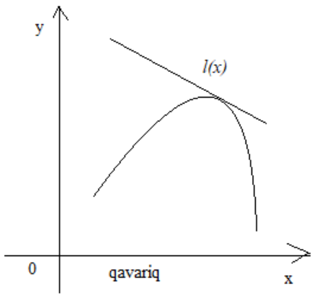
Yechish.

$$x \cdot y = 9,\ p = 2x + 2 \cdot \frac{9}{x},\ p'(x) = 0,\ x = y = 3$$

y=f(x) funksiya (a;b) da berilgan bo'lin, chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. U holda y=f(x) funksiya grafigiga ixtiyoriy M(x;y) (a<x<b) nuqtada urinma mavjud. Bu urinma y=l(x) bo'lsin

Ta'rif-1 Agar ixtiyoriy x_1 va x_2 nuqtalar $(a < x_1 < x_2 < b)$ hamda $\forall x \in (x_1; x_2)$ uchun $l(x) \le f(x)$ $\left(l(x) \ge f(x)\right)$ bo'lsa, f(x) funksiya grafigi (a;b) da botiq (qavariq) deyiladi.





Teorema-1 Agar y=f(x) funksiya (a;b) intervalda ikkinchi tartibli $f''(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f''(x) \ge 0$ $\left(f''(x) \le 0\right)$ bo'lsa, funksiya grafigi (a;b) da botiq (qavariq) bo'ladi.

Ta'rif-2 Agar y=f(x) funksiya $(x_0 - \delta, x_0)$ oraliqda qavariq (botiq) bo'lib, $(x_0, x_0 + \delta)$ botiq (qavariq) bo'lsa, u holda (x_0, y_0) nuqta funksiya grafigining burilish nuqtasi deyiladi.

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ uchun $f''(x) \ge 0$ $\quad (f'(x) \le 0) \Rightarrow$ o'suvchi (kamayuvchi);

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ uchun $f'(x) \le 0$ $\quad (f''(x) \ge 0) \Rightarrow$ kamayuvchi (o'suvchi);

x_0 da $f''(x_0) = 0$ bo'ladi va burilish nuqtasi bo'ladi.

Misol-1 Ushbu $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$ funksiyaning qavariq va botiqlik oraliqlarini, burilish nuqtalarini toping.

$f'(x) = 4x^3 - 12x - 6$

$f''(x) = 4x^3 - 12x - 6$

$12(x^2 - 1) = 0$

$y_1(1) = 1 - 6 - 6 + 1 = -10$

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$

$y = \dfrac{1}{x - 3}$

$x \to \pm\infty$

Burilish nuqatasini topamiz; $f''(x) = 0$

$12(x^2 - 1) = 0 \qquad x_{1;2} = \pm 1$

$y_1(1) = 1 - 6 - 6 + 1 = -10$

$y_2(-1) = 1 - 6 + 6 + 1 = 2$

Shunday qilib (1;-10) va (-1;2) nuqtalar burilish nuqtalardir.

Funksiya grafigini asimptotalari

y=f(x) funksiya a nuqtalarni biror atrofida aniqlangan bo'lsa, $a \in R$

Ta'rif-3 Agar ushbu $\lim_{x \to a+0} f(x) = \infty$; $\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty$ limitlardan biri yoki ikkisi ham bajarilsa x=a to'g'ri chiziq f(x) funksiya grafigining **vertikal asimptotalari** deyiladi.

Misol-2 $y = \frac{1}{x-3}$ funksiya uchun x=3 to'g'ri chiziq vertikal asimptota, chunki $\lim_{x \to 3} f\left(\frac{1}{x-3}\right) = \infty$.

Ta'rif-4 Shunday k va b sonlar mavjud bo'lib, $x \to \pm\infty$ f(x) funksiya f(x)=kx+b ko'rinishda ifodalansa, u holda y=kx+b to'g'ri chiziq y=f(x) funksiya grafigining **og'ma asimptotasi** deyiladi.

Teorema-2 f(x) funksiya grafigi y=kx+b og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad ; \qquad \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b$$

munosabatlarning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

Misol-3 Ushbu $f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x-1}$ funksiya grafigining og'ma asimptotalarini toping.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2 + x - 2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 2$$

Demak, $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = K = 2$.

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x - 2 - 2x^2 + 2x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3$$

Demak, $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b = 3$.

k=2 , b=3 $\Rightarrow$ y=2x+3 - og'ma asimptota

Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi

1˚. Funksiyaning aniqlash va qiymatlar sohasi aniqlanadi.

2˚. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish, uzilish nuqtalarini topish.

3˚. Funksiyani juft, toq hamda davriyligini aniqlash.

4˚. Funksiyani monotonlikka tekshirish.

5˚. Funksiya ekstemumlarini topish.

6˚. Funksiya grafigining qavariq va botiqligini, burulish nuqtalarini topish.

7˚. Funksiya grafigining asimptotalarini topish.

8˚. Agar imkoni bo'lsa, funksiyaning absissa va ordinata o'qi bilan kesishish nuqtalarini topish.

Misol-4 Ushbu $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ funksiyani tekshiring.

1˚. Aniqlanish sohasi (-∞; −1)∪(-1;1) ∪(1;∞).

2˚. Uzilish nuqtalari x_1=1; x_2=-1

3˚. f(-x)=f(x) demak, funksiya juft, uning grafigi OY o'qiga nisbatan simmetrik. [0;∞) da tekshirish kifoya.

4°. Funksiyani monotonligini – o'sish va kamayish oraliqlarini topamiz. $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$ da o'suvchi, $f'(x) < 0$ da kamayuvchi.

$\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} > 0 \Rightarrow x < 0$ da o'suvchi,

$\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2} < 0 \Rightarrow x > 0$ da kamayuvchi.

5°. $f''(x) = \left(\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)' = \dfrac{-4(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)\cdot 2x\cdot(-4x)}{(x^2-1)^4} = \dfrac{-4(x^2-1)+16x^2}{(x^2-1)^3} = \dfrac{-4x^2+4+16x^2}{(x^2-1)^3} = \dfrac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} = \dfrac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$;

$f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0$ da max ga erishadi.

f(0)=-1 max qiymati.

6°. $f''(x) < 0$; $\dfrac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} < 0$; $x\epsilon[0; 1)$ - qavariq

$f''(x) \geq 0$; $\dfrac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \geq 0$; $x\epsilon(1; \infty)$ - botiq.

Burulish nuqtasi yo'q chunki, $f''(x) \neq 0$; $\dfrac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0$

7°. x=1 va x=-1 vertikal asimptotalardir.

y=kx+b og'ma asimptotani topamiz.

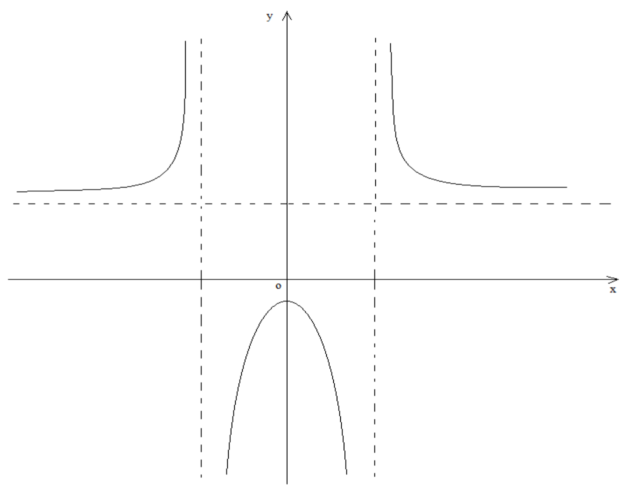
$$K = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2+1}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = 0; \qquad K=0$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+1} - 0\cdot x = 1; \qquad b=1.$$

y=kx+b=1; y=1 - gorizontal asimptota

8°. x=0 da y=-1.

Endi shu ma'lumotlar asosida $y = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ funksiya grafigini chizamiz



Takrorlash uchun savollar:

1.Funksiyaning ekstremumi.

2.Ekstrimum mavjudligining zaruriylik sharti.

3.Funksiyaning eng katta qiymatini toping qanday bajariladi.

4.Funksiyaning eng kichik qiymatini toping qanday bajariladi.

5. $f(x)=\frac{3x^2+2x}{x-1}$ funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini, hamda burilish nuqtasini toping.

6. $f(x)=\frac{x^3+2x}{x+2}$ funksiyani to'la tekshiring va grafigini chizing.

Mustaqil yechish uchun misollar.

1.Funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlarini toping.

a) $f(x)=x^4-8x^2-9$ funksiyaning a) $[-8;-1]$ kesmadagi b) $[-1;1]$ kesmadagi.

2. 1) $f(x)=x^4-8x^2+5$ funksiyaning $[-3;2]$ kesmadagi ; 2) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ funksiyaning $[-2;-0.5]$ kesmadagi ; 3) $f(x)=x-\sqrt{x}$ funksiyaning $[0;4]$ kesmadagi ; eng katta va eng kichik qiymatini toping.

3. 1) $f(x)=x^2+\frac{16}{x^2}$ funksiyaning x>0 intervaldagi ; 2) $f(x)=\frac{2}{x}-x^2$ funksiyaning

x<0 intervaldagi eng katta (eng kichik) qiymatini toping.

4. $f(x)=2x^3+3x^2-36x$ funksiyaning 1) $[-4;3]$ kesmadagi ; 2) $[-2;1]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatini toping.

5.Funksiyaning statsionar nuqtalarini toping.

1) $y=\frac{x}{2}+\frac{8}{2}$ 2) $y=2x^3-15x^2+36x$

3) $y=e^{2x}-2e^x$ 4) $y=\sin x-\cos x$

6. Funksiyaning ekstremum nuqtalarini toping.

1) $y=2x^2-20x+1$ 2) $y=3x^2+36X-1$

3) $y=\frac{x}{5}+\frac{5}{x}$ 4) $y=\frac{4}{x}+\frac{x}{16}$

7. Funksiyaning ekstremum nuqtalarini va uning shu nuqtalardagi qiymatlarini toping.

1. $y = x^3 - 3x^2$ 2. $y = x^4 - 8x^2 + 3$

3. $y = \sin x + x$ 4. $y = 2\cos x + x$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Oliy matematika. (Yo.Soatov) 1996-y. Toshkent.
2. Oliy matematika. (F.Rajabov) 2007-y. Toshkent.
3. Oliy matematikadan misol va masalalar. (Sh.Xurramov) 2015-y. Toshkent.
4. www.mathprofi.ru internet sayti.