Mavzu-12. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar va ularni taqqoslash. Limitlar haqidagi asosiy teorema.Ajoyib limitlar. Funksiyalarning uzluksizligi va uzilishi. Uzilish nuqtalari turlari. Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari.

Reja:

1. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdor tushunchasi.
2. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlarni taqqoslash.
3. Limitlar haqidagi asosiy teorema.
4. Funksiyaning uzluksizligi
5. Uzilish nuqtalari turlari
6. Asosiy elementar funksiyalar uzluksizligi.

$X \subset R$, f(x) , $x \in X$

Ta'rif-1 Agar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ bo'lsa, u holda $x \to \infty$ da f(x) funksiya cheksiz kichik miqdor deyiladi.

Misol-1 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{2^x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ funksiyalar cheksiz kichik miqdordir, chunki $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = 0$

Ta'rif-2 Agar $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ bo'lsa, u holda $x \to \infty$ da f(x) funksiya cheksiz katta miqdor deyiladi.

Misol-2 $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3 + 2$, $f(x) = \dfrac{2x^2+2}{3}$ funksiyalar cheksiz katta miqdorlardir, chunki $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 + 2 = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+2}{3} = \infty$

Cheksiz kichik miqdorlarning xossalari:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ bo'lsa, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ bo'lsa, $\forall z \in R \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} z * f(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ bo'lsa, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x) * g(x)) = 0$
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ bo'lsa, f(x) – chegaralangan
5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, g(x) - chegaralangan $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x) * g(x)) = 0$
6. $0 \le f(x) \le g(x)$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$
7. $\forall x$, $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$

Cheksiz katta miqdorlarning xossalari:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ va $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \ne 0$ bo'lsa, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) * g(x) = \infty$
2. f(x) funksiya chegaralangan, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) * g(x) = \infty$

Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog'lanish

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ bo'lsa, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$

2) $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ bo'lsa, $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = 0$

Cheksiz kichik miqdorlarni taqqoslash

Ta'rif-3 Agar $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ va $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ bo'lsa, u holda

- A=0 bo'lsa ⇒ f(x) $x \to a$da g(x) ga nisbatan "yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor" deyiladi va f(x)=o(g(x)) kabi belgilanadi
- A≠0 va chekli bo'lsa ⇒ $x \to a$ da f(x) va g(x) lar "bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar" deyiladi va f(x)=O(g(x)) kabi belgilanadi
- A=1 bo'lsa, ⇒ $x \to a$ da f(x) va g(x) lar "ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar" deyiladi va $f(x) \approx g(x)$ kabi belgilanadi
- A=±∞ bo'lsa, ⇒ f(x) $x \to a$ da g(x) ga nisbatan "quyi tartibli cheksiz kichik miqdor" deyiladi va g(x)=o(f(x)) kabi belgilanadi

Misol-3

1) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$. $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$

   $f(x) = o(g(x))$ −f(x) yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor.

2) $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = x - 2$ $\lim\limits_{x \to 2}(4 - x^2) = 0$ $\lim\limits_{x \to 2}(x - 2) = 0$ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = -4$ f(x)

   va g(x) bir xil tartibli cheksiz kichik miqdor f(x)=O(g(x))

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ - 2-ajoyib limit

   f(x)=sin x , g(x)=x $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\Rightarrow f(x) \approx g(x)$

   ekvivalent cheksiz kichik miqdor

4) $f(x) = x^2$ $g(x) = x^5$ $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} x^5 = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^5} = \infty$ $\Rightarrow$ f(x) g(x) ga nisbatan

   quyi tartibli cheksiz kichik miqdor g(x)=o(f(x))

Teorema Har qanday monoton o'suvchi (kamayuvchi) va yuqoridan (quyidan) chegaralangan funksiya chekli limitga ega bo'ladi.

Cheksiz katta miqdorlarning o'sish shkalasi

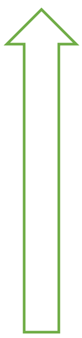
n^n

$n!$

$a^n, a > 0$

$n^a, a > 0$

$\log_a n, a > 1$



$n \to \infty$ da o'sish tezligi.

Buni quyidagicha tushunish kerak

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{n^{0,5}}=0$

X$\subset R$ to'plamda f(x) funksiya berilgan, a∈X bo'lsin. $x\to a$ da f(x) funksiya limiti haqida quyidagilarni aytish mumkin:

1. $x\to a$ da f(x) funksiya limiti mavjud, chekli va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
2. $x\to a$ da f(x) funksiya limiti mavjud, chekli va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq f(a)$, b∈X
3. $x\to a$ da f(x) funksiya limiti mavjud va $\lim\limits_{x\to a}=\infty$
4. $x\to a$ da f(x) funksiya limiti mavjud emas.

Ta'rif-1 Agar $x\to a$ da f(x) funksiya limiti mavjud, chekli va $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ bo'lsa, f(x) funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi

Misol $f(x)=x^2+x+1$ funksiya $\forall a\in R$ nuqtada uzluksiz chunki, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ ya'ni $\lim\limits_{x\to a}(x^2+x+1)=a^2+a+1$

Ta'rif-2 Agar funksiya $X\subset R$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda u X to'plamda uzluksiz deyiladi.

Misol $f(x)=\sqrt[3]{x}$ funksiya R da uzluksizligini ko'rsating.

Haqiqatan, $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}$, $\forall a\in R$ uchun.

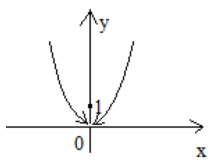
Endi $2^\circ,3^\circ,4^\circ$ hollarni ko'rib chiqaylik

Ta'rif-3 Agar $x\to a$ limiti mavjud va chekli bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq f(a)$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ yoki funksiya limiti mavjud bo'lmasa, u holda f(x) a nuqtada uzulishga ega deyiladi.

Uzulish nuqtalarini alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

Ta'rif-4 $x\to 0$ da $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq f(a)$ bo'lsin, u holda a nuqta bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzulishga ega deyiladi.

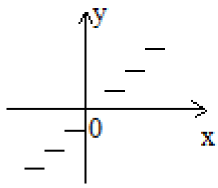
Misol $f(x)=\begin{cases}x^2, agar & x\neq 0\\ 1, agar & x=0\end{cases}$



x=0 nuqta bartaraf qilinadigan nuqta $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

Ta'rif-5 $x\to 0$ da f(x) ning limiti mavjud bo'lmasa, u holda f(x) funksiya, a nuqtada 1-tur uzulishga ega deyiladi.

Misol f(x)=[x] “antiye” bu funksiya x=a $(a \in Z)$ nuqtalarda 1-tur uzulishga ega.



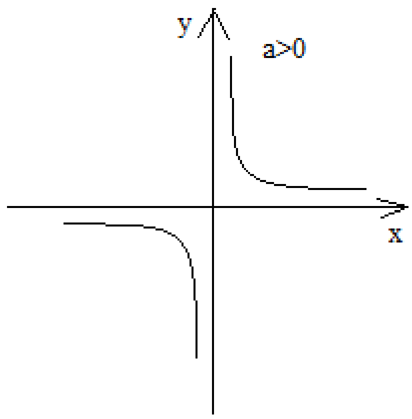
Ta’rif-6 $x \to a$ da f(x) limiti ∞ bo’lsa, u holda f(x) a nuqtada <u>2-tur uzulishga ega</u> deyiladi. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

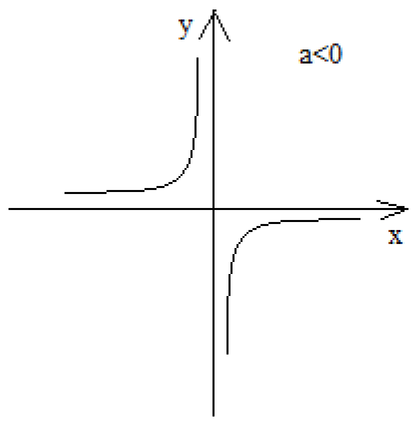
Misol $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ funksiya x=0 da 2-tur uzulishga ega, chunki $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi

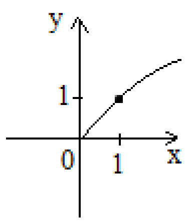
1) $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ - butun ratsional funksiya
Bu funksiya R da aniqlangan va uzluksiz.
2) $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n}$ - kasr ratsional funksiya

Xususiy holda $f(x) = \dfrac{a}{x}$ - teskari proporsional funksiya

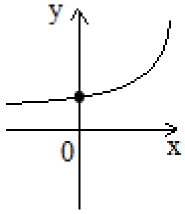




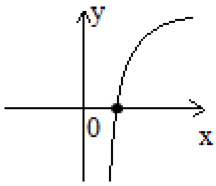
3) $f(x) = x^a$ $(x \geq 0)$ - darajali funsiya f(x) $[0;\infty)$ da uzluksiz



4) $f(x) = a^x$ $a \neq 1$ $a > 0$ - ko’rsatkichli funksiya $(-\infty;\infty)$ da aniqlangan, uzluksiz



5) $f(x)=\log_a x \quad a\neq 1 \quad a>0$ - logarifmik funksiya f(x) $(0;\infty)$ da aniqlangan, uzluksiz.



6) y=sin x , y=cos x , y=tg x , y=ctg x , y=sec x y= cosec x trigonometrik funksiyalar $\sec x=\frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$

$R=(-\infty;\infty)$ da aniqlangan, uzluksiz

7) Giperbolik funksiyalar

$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ - giperbolik sinus

$thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ - giperbolik tangens

$chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ - giperbolik cosinus

$cthx=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ - giperbolik kotangens

R da aniqlangan va uzluksiz

Takrorlash uchun savollar

1. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}=$

2. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x^2-64}{8(\sqrt[3]{x}-2)}=$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\sin 3x}=$

4. Quyidagi funksiyalarning uzluksizligini tekshiring.

a) $f(x)=x^3-3$ b) $f(x)=\cos(2x+1)$

5. Uzulish nuqtalarini toping va uzulish turini aniqlang.

a) $f(x)=\frac{x}{x+12}$ b) $f(x)=2-\frac{|x|}{x}$ c) $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}$ d) $f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Oliy matematika. (F.Rajabov) 2007-y. Toshkent.
2. Matematika. (A. Sanginov) 2011-y. Toshkent.
3. Курс математического анализа. (Л. Кудрявцев) 1998-г. Москва.
4. www.mathprofi.ru internet sayti.