Mavzu-11. Sonli ketma ketliklar. Ketma ketlik limiti va ularning ayrim xossalari. Chegaralangan, monoton ketma- ketlikning limiti. Funkiyaning limiti va uning xossalari. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti. Bir tomonlama limitlar.

Reja:

1. Sonli ketma-ketlik ta'rifi
2. Chegaralangan ketma-ketliklar
3. Monoton ketma-ketliklar
4. Sonli ketma-ketlikning xossalari
5. Funksiya limitining ta'rifi

N va **R** to'plamlar berilgan bo'lib, f – har bir natural n ga biror haqiqiy sonni mos qo'yuvchi qoida bo'lsin.

Ta'rif-1 Biror f qoidaga ko'ra har bir natural n songa x_n (x_n Є R) haqiqiy sonni mos qo'yilishiga f:n→ x_n sonli ketma-ketlik deyiladi.

Demak, $x_n = f(n)$ $\{x_n\}$: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ (1)

Misol

1) $x_n=1$ $1,1,1,\dots,1,\dots$
2) $x_n=\frac{1}{n}$ $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n}\dots$
3) $x_n=(-1)^{n+1}$ $1,-1,1,-1,\dots,(-1)^{n+1}$
4) $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ $0,1,0,\dots,\frac{1+(-1)^n}{2},\dots$
5) $x_n=\sin n\pi$ $\sin\pi, \sin 2\pi, \sin 3\pi,\dots,\sin n\pi,\dots$
6) $x_n=x_{n-2}-x_{n-1}$, $n\geq3$, $x_1=1$, $x_2=1$, $1,1,2,3,5,8,13,21,\dots$ (Fibonachchi sonlari)
7) x_n – n nomerli tub sonlar $2,3,5,7,11,\dots$

Ta'rif-2 Agar shunday M (m) soni mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) shart bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

Ta'rif-3 Ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan ketma-ketliklar chegalangan ketma-ketliklar deyiladi.

Ta'rif-4 Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lib, $\forall\varepsilon > 0$ soni uchun $\exists N, n > N$ va biror chekli A son uchun $|x_n-A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, bu A son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ kabi yoziladi.

Ta'rif-5 Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u yaqinlashuvchi, aks holda, uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Ta'rif-6 Agar $\forall n \in N$ uchun $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$) tengsizlik o'rinli bo'lsa , $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o'suvchi (monoton kamayuvchi) ketma-ketlik deyiladi.

X O S S A L A R I :

$\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar berilgan, yaqinlashuvchi va $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ bo'lsin.

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n * b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n * \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A * B$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, c-const

5) $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = c * \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c * A$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$ Bu limit – ajoyib limit deyiladi

$e = 2{,}718281$ ... cheksiz davriy bo'lmagan irratsional son.

$(a_n \pm b_n)$, $(a_n * b_n)$, $\frac{a_n}{b_n}$ – ko'rinishidagi limitlarni hisoblashda $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty$ ko'rinishidagi ifodalar hosil bo'lishi mumkin, bu ifodalar **aniqmasliklar** deyiladi.

Monoton ketma-ketliklarning limiti haqidagi teoremalar

Teorema-1 Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda u chekli limitga ega bo'ladi.

Teorema-2 Agar$\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi va yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u holda u chekli limitga ega bo'ladi.

Misollar

1) $a_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$ ketma-ketlikning dastlabki 5 hadini yozing.

△ $a_1 = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$; $a_4 = \frac{\sin\frac{4\pi}{2}}{4} = \frac{0}{4} = 0$;

$a_2 = \frac{\sin\frac{2\pi}{2}}{2} = \frac{0}{2} = 0$; $a_5 = \frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5} = \frac{1}{5}$; ▲

$a_3 = \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} = \frac{-1}{3}$; Demak $1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots$

2) $\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{10}{13}, \frac{17}{18}, \frac{26}{23}$ ketma-ketlikning umumiy hadi yozilsin.

△ 2, 5, 10,17, 26, … - n^2+1 surati;

3, 8, 13, 18, 23, … - $a_n = a_1 + d(n-1) = 3 + d(n-1) = 3 + 5(n-1) = 3 + 5n - 5 = 5n - 2$ maxraji;

Shunday qilib, $\{x_n\} = \frac{n^2+1}{5n-2}$ ▲

3) $x_1=1$, $x_2=2$ va $n>2$ da $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}$. Dastlabki 7 hadini toping.

△ $x_3 = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$

$x_4 = x_3 - x_2 = 1 - 2 = -1$

$x_5 = x_4 - x_3 = -1 - 1 = -2$

$x_6 = x_5 - x_4 = -2 - (-1) = -2 + 1 = -1$

$x_7 = x_6 - x_5 = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1$ ▲

X$\subset R$ to'plamda f(x) funksiya berilgan, a∈X bo'lsin. $x \to a$ da f(x) funksiya limiti haqida quyidagilarni aytish mumkin:

1. $x \to a$ da f(x) funksiya limiti mavjud, chekli va $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. $x \to a$ da f(x) funksiya limiti mavjud, chekli va $\lim_{x \to a} f(x) = b \neq f(a)$, b∈X
3. $x \to a$ da f(x) funksiya limiti mavjud va $\lim_{x \to a} = \infty$
4. $x \to a$ da f(x) funksiya limiti mavjud emas.

Takrorlash uchun savollar.

1. Sonli ketma-ketlik ta'rifini ayting.
2. Chegaralangan ketma-ketlikka misol keltiring.
3. Monoton ketma-ketlik qanday ketma- ketlik.
4. Ketma-ketlik limiti ta'rifini keltiring.
5. Funksiya limiti ta'rifini keltiring

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Oliy matematika. (Yo.Soatov) 1996-y. Toshkent.
2. Matematika. (A. Sanginov) 2011-y. Toshkent.
3. Oliy matematikadan misol va masalalar. (Sh.Xurramov) 2015-y. Toshkent.
4. www.mathprofi.ru internet sayti.