I BOB. TO‘PLAM TUSHUNCHASI.

Hozirgi zamon matematikasi tarkibiga
cheksiz to‘plam tushunchasini kirishi
uni tubdan revolyutsionlashtirdi.

Aleksandrov P.S.

§1. TO‘PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR

- ***To‘plamlar va ularga doir tushunchalar.***
- ***To‘plamlar ustida amallar va ularning xossalari.***

Adabiyotlar: 1,4,9,12,11,15,16.

Tayanch iboralar: To‘plam, to‘plam elementi, bo‘sh to‘plam, to‘plam qismi, to‘plamlar tengligi, to‘plamlar birlashmasi, to‘plamlar kesishmasi, to‘plamlar ayirmasi, Universal to‘plam, To‘plam to‘ldiruvchisi, Dekart ko‘paytma.

1.1. To‘plamlar va ularga doir tushunchalar. To‘plamlar nazariyasi deyarli barcha matematik fanlarnining asosida yotadi. Bu nazariya asoslari 1879–1884 yillarda olmon matematigi ***Georg Kantor*** tomonidan chop etilgan bir qator maqolalarda yoritib berildi. ***To‘plam*** matematikaning poydevorida yotgan boshlang‘ich tushunchalardan biri bo‘lgani uchun u ta’rifsiz qabul etiladi. To‘plam deyilganda biror bir xususiyati bo‘yicha umumiylikga ega bo‘lgan obyektlar majmuasi tushuniladi. Masalan, I kurs talabalari to‘plami, [0,1] kesmadagi nuqtalar to‘plami, natural sonlar to‘plami, firma xodimlari to‘plami, korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar to‘plami va hokazo. Matematikada to‘plamlar A,B,C,D,… kabi bosh harflar bilan belgilanadi. A,B,C,D,… to‘plamlarga kiruvchi obyektlar ularning ***elementlari*** deyiladi va odatda mos ravishda kichik *a,b ,c ,d,*… kabi harflar bilan belgilanadi. Bunda «*a* element A to‘plamga tegishli (tegishli emas)» degan tasdiq $a\in A$ ($a\notin A$) kabi yoziladi.

1-*TA’RIF:* Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam ***bo‘sh to‘plam*** deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

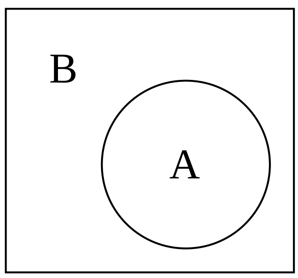
Masalan, { sin$x$ = 2 tenglamaning yechimlari}$=\varnothing$, { perimetri 0 bo‘lgan kvadratlar }$=\varnothing$, { kvadrati manfiy bo‘lgan haqiqiy sonlar }$=\varnothing$.

Algebrada 0 soni qanday vazifani bajarsa, to‘plamlar nazariyasida $\varnothing$ to‘plam shunga o‘xshash vazifani bajaradi.

2-*TA’RIF:* Agar A to‘plamga tegishli har bir *a* element boshqa bir B to‘plamga ham tegishli bo‘lsa ($a\in A \Rightarrow a\in B$), u holda A to‘plam B ***to‘plamining qismi*** deyiladi va $A\subset B$ (yoki $B\supset A$) kabi belgilanadi.

Quyidagi 1-rasmda B kvadratdagi, A esa uning ichida joylashgan doiradagi nuqtalar to‘plamimni ifodalasa, unda $A\subset B$ bo‘ladi.

1-rasm



Masalan, korxonada ishlab chiqarilayotgan oliy navli mahsulotlar to‘plamini A, barcha mahsulotlar to‘plamini esa B deb olsak , unda $A\subset B$ bo‘ladi.

Ta’rifdan ixtiyoriy A to‘plam uchun $A\subset A$ va $\varnothing\subset A$ tasdiqlar o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Shu sababli to‘plamlar uchun $\subset$ belgisi sonlar uchun $\leq$ belgiga o‘xshash ma’noga egadir.

3-*TA’RIF:* Agarda A va B to‘plamlar uchun $A\subset B$ va $B\subset A$ shartlar bir paytda bajarilsa, bu to‘plamlar ***teng*** deyiladi va A=B kabi yoziladi.

Masalan, A={–1;1} va B={x^2–1=0 tenglama ildizlari}, C= {badiiy asarni yozish uchun ishlatilgan harflar} va D={alfavitdagi harflar} to‘plamlari uchun A=B, C=D bo‘ladi.

1.2. To‘plamlar ustida amallar va ularning xossalari. Algebrada *a* va *b* sonlar ustida qo‘shish va ko‘paytirish amallari kiritilgan bo‘lib, ular

$a+b=b+a$ va $ab=ba$ (kommutativlik , ya’ni o‘rin almashtirish),

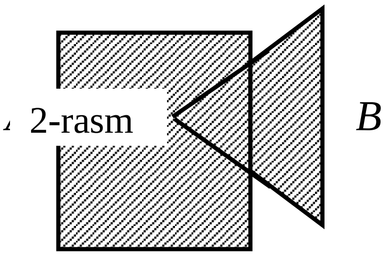
$a+(b+c)=(a+b)+c$ va $a(bc)=(ab)c$ (assotsiativlik, ya’ni guruhlash),

$a(b+c)=ab+ac$ (distributivlik, ya’ni taqsimot)

Qonunlariga bo‘ysunadilar. Bulardan tashqari har qanday *a* soni uchun $a+0=a$ va $a\cdot 0=0$ tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi. Endi to‘plamlar ustida algebraik amallar kiritamiz.

4-*ta’rif:* a va в to‘plamlarning *birlashmasi (yig‘indisi)* deb shunday c to‘plamga aytiladiki, u a va в to‘plamlardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi va a$\cup$в kabi belgilanadi.

Agar a kvadratdagi, b esa uchburchakdagi nuqtalar to‘plamidan iborat bo‘lsa, unda ularning birlashmasi a$\cup$в quyidagi 2-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi:



2-rasm

Shunday qilib a$\cup$в to‘plam yoki a to‘plamga , yoki в to‘plamga, yoki a va в to‘plamlarning ikkalasiga ham tegishli elementlardan iboratdir.

Masalan, a={1,2,3,4,5} va в={2,4,6,8} bo‘lsa a$\cup$в={1,2,3,4,5,6,8}, c={i navli mahsulotlar} va d={ii navli mahsulotlar } bo‘lsa, unda c$\cup$d={i yoki ii navli mahsulotlar} to‘plamni ifodalaydi.

To‘plamlarni birlashtirish amali , sonlarni qo‘shish amali singari,

a$\cup$в =в$\cup$a (kommutativlik),

(a$\cup$в) $\cup$ c=a$\cup$ (в$\cup$c) (assosiativlik)

Qonunlarga bo‘ysunadi. bulardan tashqari a$\cup\varnothing$=a va, sonlardan farqli ravishda, a$\cup$a=a, в$\subset$a bo‘lsa a$\cup$b=a tengliklar ham o‘rinli bo‘ladi. bu tasdiqlarning barchasi to‘plamlar tengligi ta’rifidan foydalanib isbotlanadi. misol sifatida, oxirgi tenglikni isbotlaymiz:

$x\in A\cup B\Rightarrow x\in A$ yoki $x\in B\Rightarrow x\in A\Rightarrow (A\cup B)\subset A;$

$x\in A\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow A\subset (A\cup B)$

Demak, $(A\cup B)\subset A$, $A\subset (A\cup B)$ va , ta’rifga asosan, a$\cup$в =a.

Bir nechta $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ to‘plamlarning yig‘indisi

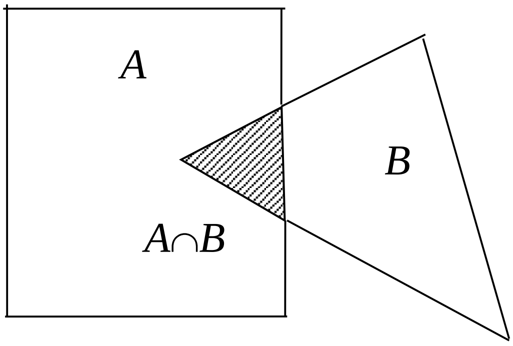
$$a_1\cup a_2\cup a_3\cup\ldots\cup a_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$$

kabi belgilanadi va ulardan kamida bittasiga tegishli bo‘lgan elementlar to‘plami sifatida aniqlanadi.

<u>5 *-ta'rif:*</u> A va B to'plamlarning *kesishmasi (ko'paytmasi)* deb shunday C to'plamga aytiladiki, u A va B to'plamlarning ikkalasiga ham tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan bo'ladi va $A\cap B$ kabi belgilanadi.

Agar A kvadratdagi, B esa uchburchakdagi nuqtalar to'plamini belgilasa, unda ularning $A\cap B$ kesishmasi 3-rasmdagi shtrixlangan soha kabi ifodalanadi:

3-rasm



Shunday qilib $A\cap B$ to'plam A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan bo'ladi. shu sababli agar ular umumiy elementlarga ega bo'lmasa, ya'ni kesishmasa, unda $A\cap B=\varnothing$ bo'ladi.

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{2,4,6,8\}$ bo'lsa $A\cap B=\{2,4\}$,
C={tekshirilgan mahsulotlar} va D={sifatli mahsulotlar} bo'lsa, unda
$C\cap D$={tekshirishda sifatli deb topilgan mahsulotlar} to'plamni ifodalaydi.

To'plamlarni kesihmasi amali quyidagi qonunlarga bo'ysunadi:

$A\cap B=B\cap A$ (kommutativlik),

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (assotsiativlik),

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (distributivlik)

shu bilan birga $A\cap A=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$ va $B\subset A$ bo'lsa $A\cap B=B$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi. bu tasdiqlarning o'rinli ekanligiga yuqorida ko'rsatilgan usulda ishonch hosil etish mumkin.

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlarning kesishmasi

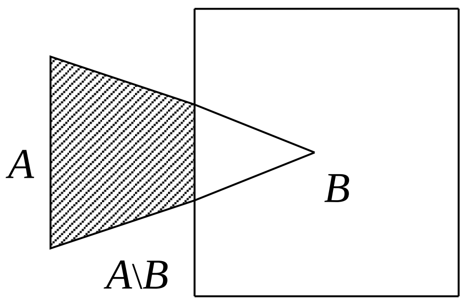
$$A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

kabi belgilanadi va barcha A_k ($k=1,2,\cdots,n$) to'plamlarga tegishli bo'lgan umumiy elementlardan tuzilgan to'plam kabi aniqlanadi.

<u>*6-ta'rif:*</u> A va B to'plamlarning *ayirmasi* deb A to'plamga tegishli, ammo B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A\setminus B$ kabi belgilanadi.

Agar A uchburchakdagi, B esa kvadratdagi nuqtalar to'plamini belgilasa, unda ularning $A\setminus B$ ayirmasi 4-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi :

4-rasm



masalan, $A=\{1,2,3,4,5\}$ va $B=\{1,3,7,9\}$ bo'lsa, unda $A\setminus B=\{2,4,5\}$, $B\setminus A=\{7,9\}$;
C={korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar}va D={sifatli mahsulotlar} bo'lsa,
$C\setminus D$={ korxonada ishlab chiqarilgan sifatsiz mahsulotlar }.

Demak, a\в to‘plam a to‘plamning b to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlaridan hosil bo‘ladi. to‘plamlar ayirmasi uchun

$$a\backslash a=\varnothing,\quad a\backslash\varnothing=a\ ,\ \ \varnothing\backslash a=\varnothing$$

va $a\subset b$ bo‘lsa $a\backslash b=\varnothing$ munosabatlar o‘rinlidir.

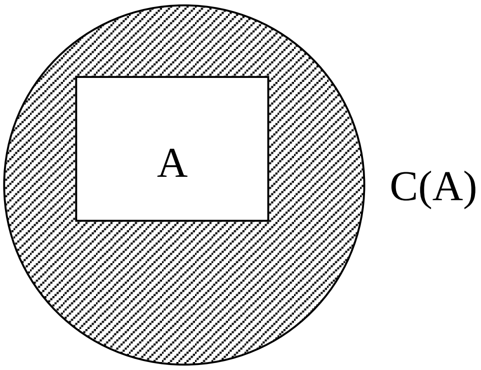
<u>7-ta’rif:</u> agar ko‘rilayotgan barcha to‘plamalarni biror ω to‘plamning qism to‘plamlari kabi qarash mumkin bo‘lsa, unda ω *universal to‘plam* deb ataladi.

Masalan, sonlar bilan bog‘liq barcha to‘plamlar uchun ω=(–∞, ∞) , insonlardan iborat to‘plamlar uchun ω={barcha odamlar} universal to‘plam bo‘ladi.

<u>8 -ta’rif:</u> agar a to‘plam ω universal to‘plamning qismi bo‘lsa, unda ω\a to‘plam *a to‘plamning to‘ldiruvchisi* deb ataladi va c(a) kabi belgilanadi.

Agar quyidagi chizmada ω universal to‘plam doiradagi, a to‘plam esa uning ichida joylashgan to‘ri to‘rtburchakdagi nuqtalardan iborat bo‘lsa, uning to‘ldiruvchisi c(a) 5-rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi:

5-rasm

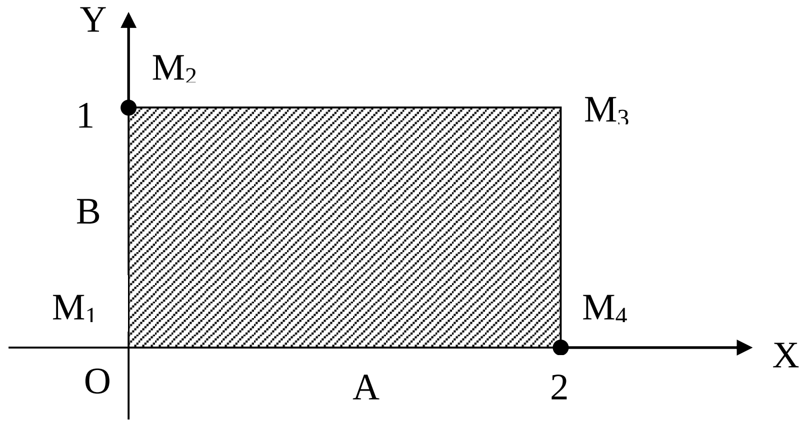


Demak, c(a) to‘plam a to‘plamga kirmaydigan elementlardan tashkil topgan bo‘ladi, ya’ni $x\in A\Rightarrow x\notin C(A),\quad x\notin A\Rightarrow x\in C(A)$.

Masalan, ω={barcha korxonalar}, a={rejani bajargan korxonalar} bo‘lsa, unda c(a)={ rejani bajarmagan korxonalar} to‘plami bo‘ladi;
ω={1,2,3, · · ·, *n*, · · ·}–natural sonlar to‘plami, a={2,4,6, · · · , 2*n*, · · ·}–juft sonlar to‘plami, b={5,6,7, · · ·, *n*, · · ·}– 4dan katta natural sonlar to‘plami bo‘lsa, unda
c(a)={1,3,5, · · ·, 2*n*–1, · · ·}– toq sonlar, c(b)={1,2,3,4}–5dan kichik natural sonlar to‘plamlarini ifodalaydi.

<u>9-ta’rif:</u> a va в to‘plamlarning *dekart ko‘paytmasi* deb a×в kabi belgilanadigan va (x, y) $(x\in$a, $y\in$в) ko‘rinishdagi juftliklardan tuzilgan yangi to‘plamga aytiladi.

Masalan, a=[0,2] va b=[0,1] bo‘lsa, a×в to‘plam tekislikdagi (x, y) ($x\in$a=[0,2], $y\in$b=[0,1]) nuqtalardan, ya’ni uchlari $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(2,1)$ va $M_4(2,0)$ nuqtalarda joylashgan to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat bo‘ladi (6-rasmga qarang):



6-rasm

Agar c={tajribali ishchilar} va d={yosh ishcilar} bo‘lsa, unda $c\times d$ tajribali va yosh ishchidan iborat bo‘lgan turli “ustoz-shogird” juftliklaridan iborat to‘plamni ifodalaydi.

Umuman olganda to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi uchun $a\times в\neq в\times a$, ya’ni kommutativlik qonuni bajarilmaydi. masalan, a=[0,2] va b=[0,1] to‘plamlar uchun $a\times в$ asosining uzunligi 2, balandligi 1 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni , $в\times a$ esa asosining uzunligi 1, balandligi 2 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni ifodalaydi va bunda $a\times в\neq в\times a$ bo‘ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. To‘plamlar nazariyasining ahamiyati nimadan iborat?
2. To‘plamlar nazariyasiga kim asos solgan?
3. To‘plam deganda nima tushuniladi?
4. To‘plam elementi qanday aniqlanadi?
5. To‘plamlarga misollar keltiring.
6. Qanday to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi?
7. To‘plam qismi qanday ta’riflanadi?
8. Qachon ikkita to‘plam teng deyiladi?
9. To‘plamlar birlashmasi qanday kiritiladi?
10. To‘plamlar birlashmasi amali qanday xossalarga ega?
11. To‘plamlar kesishmasi qanday ta’riflanadi?
12. To‘plamlar kesishmasi amali qanday xossalarga ega?
13. To‘plamlar ayirmasi qanday aniqlanadi?
14. Universal to‘plam nima?
15. To‘plam to‘ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
16. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?
17. To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun kommutativlik qonuni o‘rinlimi ?

§2. Sonli to’plamlar. Haqiqiy sonlar to’plami, xossalari va moduli.

Reja:

1. Haqiqiy sonlar.
2. Haqiqiy sonlarning geometrik tasviri. To’g’ri chiziq nuqtalarining koordinatalari.
3. Haqiqiy sonning absolyut(mutloq) qiymati.

Adabiyotlar: 3,5,7,10,11,15,16.

Tayanch iboralar: natural son, butun son, ratsional son, irratsional son, haqiqiy son, son o’qi, masshtab, sonning absolyut qiymati,

1.1. Haqiqiy sonlar.

Narsalarni, buyumlarni sanash zaruryati tufayli **natural** sonlar to’plami $N=\{1,2,3...\}$ paydo bo’ladi. Bu to’plamga natural sonlarga qarama-qarshi sonlarni hamda nolni qo’shish (birlashtirish) natijasida **butun** sonlar to’plami Z={...,-n,...,-3,-2,-1,0,1,2,...,n,...} yuzaga keldi. Keyinchalik ikkita butun sonlarning nisbati ko’rinishida tasvirlanadigan **ratsional** sonlar to’plami Q={p/q} (bunda $p,q\in Z, q\neq 0$) kiritildi. Har qanday p butun sonni $\frac{\rho}{1}$ ko’rinishda tasvirlash mumkin bo’lganligi uchun butun sonlar ham ratsional sonni tashkil etadi. Istalgan sonni ikkita butun sonlarning nisbati ko’rinishda tasvirlash mumkinmi, degan savolga yo’q degan javob olindi. Masalan, tomonlari bir birlikka teng kvadratning diagonali uzunligi (d=$\sqrt{2}$), shuningdek aylana uzunligining uning diametriga nisbati (π) kabi sonlarni ikkita butun sonlarning nisbati ko’rinishida tasvirlab bo’lmasligi isbotlandi.

Ratsional bo’lmagan sonlar **irratsional** sonlar deyiladi.

Har qanday ratsional son chekli yoki cheksiz davriy o’nli kasr shaklida tasvirlanishini irratsional son esa cheksiz davriy bo’lmagan o’nli kasr shaklida tasvirlanishni eslatib o’tamiz.

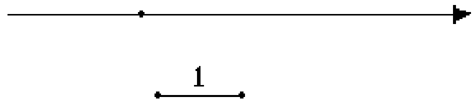
Masalan, $\frac{1}{4}$=0,25 chekli o'nli kasr, $\frac{7}{9}$=0,777...=0,(7) cheksiz davriy kasr, $\sqrt{2}$=1,414..., π=3,14159..., e=2,7182818284... cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasrlardir.

Ratsional va irratsional sonlar to'plamlarining birlashmasi haqiqiy sonlar to'plamini tashkil etadi va u R orqali belgilanadi.

1.2. Haqiqiy sonlarning geometrik tasviri. To'g'ri chiziq nuqtalarining koordinatalari.

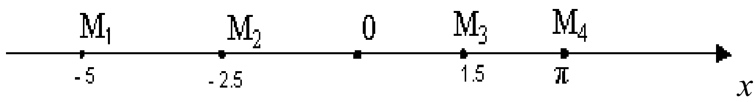
Sonlar o'qi yoki o'q deb sanoq boshi-koordinatalar boshi, musbat yo'nalish hamda uzunligi bir birlikka teng sanaluvchi kesma-o'lchov birligi tanlangan to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Yo'nalish chizmada strelka orqali belgilanadi. Agarda sonlar o'qi 1-chizmada ko'rsatilganidek tanlansa, musbat x haqiqiy songa sonlar o'qining sanoq boshi



1-chizma.

0 dan o'ngdagi undan x masofada bo'lgan nuqtasi, manfiy x songa 0 sanoq boshidan chapdagi undan $-x$ masofada bo'lgan nuqtasi mos keladi; 0 songa sonlar o'qining sanoq boshi mos keladi. x haqiqiy son sonlar o'qida uni tasvirlovchi M nuqtaning **koordinatasi** deb aytiladi va $M(x)$ ko'rinishda yoziladi.



2-chizma.

2-chizmada –5, -2.5, 1.5, π haqiqiy sonlarni sonlar o'qida mos ravishda tasvirlovchi $M_1(-5)$, $M_2(-2.5)$, $M_3(1.5)$ va $M_4(\pi)$, nuqtalar ko'rsatilgan.

Shunday qilib, istalgan x haqiqiy songa sonlar o'qining aniq bitta M nuqtasi va aksincha sonlar o'qining istalgan M nuqtasiga bitta haqiqiy son shu nuqtaning koordinatasi x mos kelar ekan. Boshqacha aytganda haqiqiy sonlar to'plami bilan sonlar o'qining nuqtalari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan.

Haqiqiy sonlar to'plamining muhim xossalaridan biri uning tartiblanganligi, ya'ni istalgan ikkita o'zaro teng bo'lmagan x_1 va x_2 haqiqiy sonlar uchun $x_1>x_2$ va $x_1<x_2$ munosabatlardan faqatgina biri bajariladi xolos.

Agar sonlar o'qi 1-chizmada ko'rsatilganidek ya'ni gorizontal joylashtirilgan bo'lib yo'nalish chapdan o'ngga tayinlangan bo'lsa, katta haqiqiy sonni tasvirlovchi nuqta kichik haqiqiy sonni tasvirlovchi nuqtadan o'ngda yotadi.

1.3. Haqiqiy sonning absolyut (mutloq) qiymati.

$x\geq 0$ haqiqiy sonning absolyut qiymati (moduli) deb shu sonning o'ziga, $x<0$ sonning absolyut qiymati deb $-x$ songa aytiladi. x haqiqiy sonning absolyut qiymati $|x|$ kabi yoziladi.

Shunday qilib:

$$|x| = \begin{cases} x, & agar\ x \geq 0\ bo'lsa, \\ -x, & agar\ x < 0\ bo'lsa. \end{cases}$$

Masalan, $|8|=8$, $|5|=5$, $|-5|=5$.

Noldan farqli istalgan haqiqiy sonning moduli musbat bo'lar ekan.

Istalgan $\varepsilon>0$ uchun $|x|<\varepsilon$ va $-\varepsilon<x<\varepsilon$ tengsizliklar teng kuchliligini eslatib o'tamiz.

Haqiqiy sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1. $|x_1+x_2|\leq|x_1|+|x_2|$.

2. $|x_1 - x_2| \geq |x_1| - |x_2|$.
3. $|x_1 \cdot x_2 \cdots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdots |x_n|$.
4. $\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|}$.

Izoh. Kelgusida faqatgina haqiqiy sonlar bilan ish ko’rganimiz uchun haqiqiy son o’rniga oddiy son iborasini ishlatamiz.

Takrorlash uchun savollar

1. Natural son nima?
2. Butun son nima?
3. Ratsional son nima?
4. Irratsional son nima?
5. Haqiqiy son nima?
6. Haqiqiy sonning geometrik tasviri nima?
7. Haqiqiy sonning absolyut qiymatini ta‘riflang?